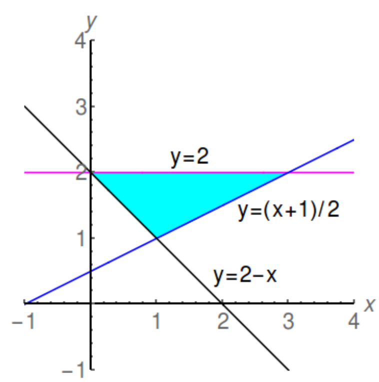
Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 2. Übungsblatts

1. Geraden und Ungleichungen:

   (a) Die Steigung durch $P(1,1)$ und $Q(3,2)$ ist
   $$s = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$
   und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ ist die Gerade gegeben durch
   $$y_1(x) = \tfrac{1}{2}(x-1) + 1 = (x+1)/2$$
   Die Steigung durch $Q(3,2)$ und $R(0,2)$ ist
   $$s = \frac{2-2}{0-3} = 0$$
   und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (3,2)$ ist die Gerade gegeben durch
   $$y_2(x) = 0(x-3) + 2 = 2$$
   Die Steigung durch $R(0,2)$ und $P(1,1)$ ist
   $$s = \frac{1-2}{1-0} = -1$$
   und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (0,2)$ ist die Gerade gegeben durch
   $$y_3(x) = -(x-0) + 2 = 2 - x$$

   (b) Die grafische Darstellen des Dreicks ist:



   Die Darstellung des Dreiecks D (inklusive des Randes) in Mengennotation ist
$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \le 2\} \quad \cap \\ &\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \ge 2 - x\} \quad \cap \\ &\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \ge (x+1)/2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x+1)/2 \le y \le 2, \; 2 - x \le y \le 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \le 2, \; 2 - y \le x \le 2y - 1\} \end{aligned}$$

(c) Die Darstellung des Dreiecks D (exklusive des Randes) in Mengennotation ist

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)/2 < y < 2, \ 2-x < y < 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < 2, \ 2-y < x < 2y-1\} \end{aligned}$$

2. Hyperbeln und Ungleichungen:

(a) Lösungen der Gleichung

$$y^2 - x^2 = 1 \quad \text{oder} \quad y^2 = 1 + x^2 \quad \text{oder} \quad |y| = \sqrt{1+x^2}$$

sind

$$y \in \{-\sqrt{1+x^2}, \sqrt{1+x^2}\}$$

Zwei entsprechende Funktionen sind

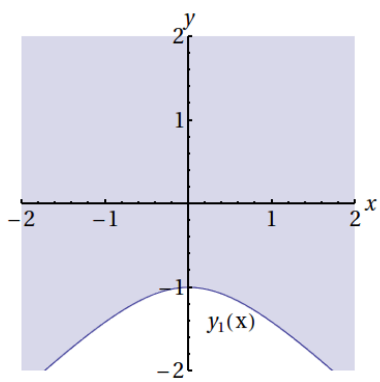
$$y_1(x) = -\sqrt{1+x^2} \quad \text{und} \quad y_2(x) = +\sqrt{1+x^2}$$

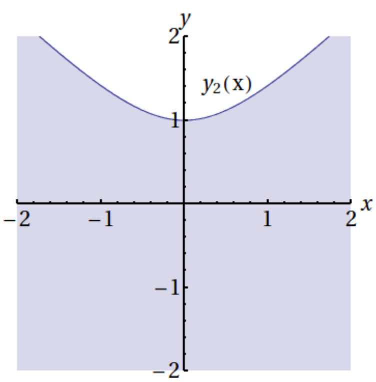
die $y_1(x) < 0$ und $y_2(x) > 0$ erfüllen.

(b) Die grafische Darstellung der Mengen

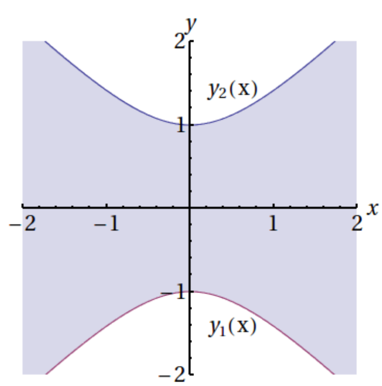
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) < y\} \quad \text{bzw.} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < y_2(x)\}$$

sind





(c) Die grafische Darstellung der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_2(x) < y < y_1(x)\}$ ist



Die Ungleichung $-\sqrt{1+x^2} < y < \sqrt{1+x^2}$ ist äquivalent zu

$$|y| < \sqrt{1+x^2} \quad \text{oder} \quad y^2 < 1 + x^2$$

und daher sind die folgenden Darstellungen der oben grafisch dargestellten Menge äquivalent:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 1\} \quad \text{und} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) < y < y_2(x)\}$$

3. Parabeln und Ungleichungen:

   (a) Die Nullstellen der quadratischen Funktion $q(x) = -6 - 4x + 2x^2$ sind

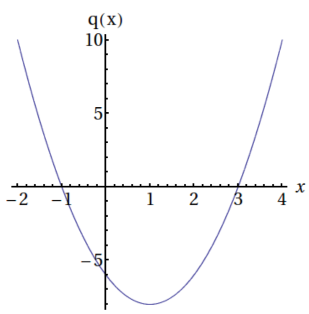
   $$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = -1, \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{4^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = +3$$

   (b) Es folgt die Faktorisierung $q(x) = 2(x+1)(x-3)$.

   (c) Eine Tabelle mit dem Vorzeichen von $q(x)$ und seinen Faktoren in den Teilintervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, +3)$ und $(+3, +\infty)$ ist

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +3)$	$(+3, +\infty)$
2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$q(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

   (d) Die grafische Darstellung von q ist



   (e) Aus der Grafik ist ersichtlich, $q(x) < 0$ gilt für $x \in (-1, 3)$.

4. Kubische und Biquadratische Polynome:

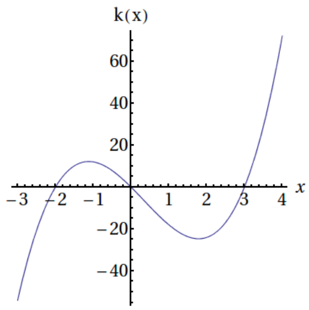
   (a) Die Nullstellen des kubischen Polynoms $k(x) = -18x - 3x^2 + 3x^3$ bestimmt man zuerst durch die Faktorisierung,

   $$k(x) = xq(x), \quad q(x) = 3x^2 - 3x - 18$$

   Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $q(x) = 3x^2 - 3x - 18$ sind

   $$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4(3)(-18)}}{2(3)} = -2, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{3^2 + 4(3)(-18)}}{2(3)} = +3$$

   Es folgen die Faktorisierungen $q(x) = 3(x+2)(x-3)$ und $k(x) = xq(x) = 3x(x+2)(x-3)$. Die grafische Darstellung von $k(x)$ ist



(b) Die Nullstellen des biquadratischen Polynoms $b(x) = -24 - 4x^2 + 4x^4$ bestimmt man zuerst durch die Darstellung,

$$b(x) = -24 - 4\left(x^2\right) + 4\left(x^2\right)^2 = q(x^2), \quad q(x) = -24 - 4x + 4x^2$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $q(x) = -24 - 4x + 4x^2$ sind

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4(4)(-24)}}{2(4)} = -2, \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{4^2 + 4(4)(-24)}}{2(4)} = +3$$

Es folgen die Faktorisierungen $q(x) = 4(x+2)(x-3)$ und $b(x) = q(x^2) = 4(x^2+2)(x^2-3)$. Die Nullstellen des Faktors $x^2 + 2$ sind komplex,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-\sqrt{-1}\sqrt{8}}{2} = -\imath\sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = +\sqrt{2}\imath$$

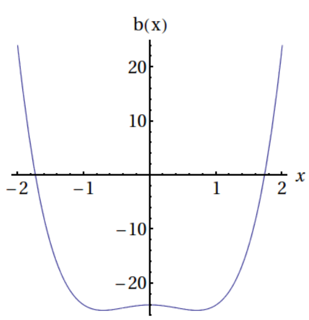
Die Nullstellen des Faktors $x^2 - 3$ sind reel,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = -\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x_2 = +\sqrt{3}$$

Es ergibt sich dann

$$b(x) = 4(x^2 + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 4(x + \sqrt{2}\imath)(x - \sqrt{2}\imath)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Die grafische Darstellung von $b(x)$ ist



5. Polynomdivision:

(a) Mit $b(x) = -6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4$ ist der Quotient $k(x) = b(x)/(x+2)$ gegeben durch

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & x^4 & -x^3 & -5x^2 & -x & -6 & \div & x+2 & = & x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
\ominus & x^4 & +2x^3 & & & & & & & \\
\hline
 & 0 & -3x^3 & -5x^2 & -x & -6 & & & & \\
\ominus & & -3x^3 & -6x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & x^2 & -x & -6 & & & & \\
\ominus & & & x^2 & +2x & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & -3x & -6 & & & & \\
\ominus & & & & -3x & -6 & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

oder $k(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

(b) Der Quotient $q(x) = k(x)/(x-3)$ ist gegeben durch

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & x^3 & -3x^2 & +x & -3 & \div & x-3 & = & x^2+1 \\
\ominus & x^3 & -3x^3 & & & & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & x & -3 & & & & \\
\ominus & & & x & -3 & & & & \\
\hline
 & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

oder $q(x) = x^2 + 1$.

(c) Die Nullstellen von $q(x) = x^2 + 1$ sind komplex,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0 - 4(1)(1)}}{2(1)} = -\frac{\sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = -\imath \quad \text{und} \quad x_2 = +\imath$$

Die Faktorisierung

$$b(x) = (x+2)k(x) = (x+2)(x-3)q(x) = (x+2)(x-3)(x^2+1)$$

zeigt, die Nullstellen von $b(x)$ sind $\{-2, 3, -\imath, +\imath\}$. Die grafische Darstellung von $b(x)$ ist