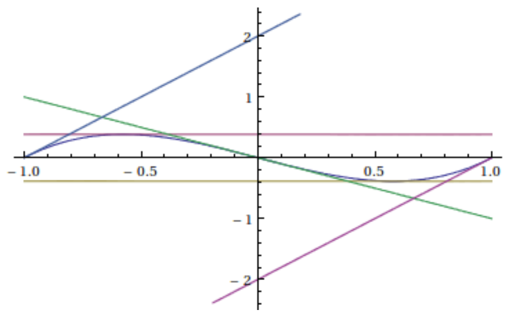
Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 1. Übungsblatts

1. Wolfram Alpha:

   (a) Der Befehl

   `Plot[{x^3-x,2/(3 Sqrt[3]),-2/(3 Sqrt[3]),-x,2(x+1),2(x-1)},{x,-1,1}]`

   stellt die Funktionen $f(x) = x^3 - x$, $y_1(x) = 2/(3\sqrt{3})$, $y_2(x) = -2/(3\sqrt{3})$, $y_3(x) = -x$, $y_4(x) = 2(x+1)$ und $y_5(x) = 2(x-1)$ gemeinsam im Intervall $[-1, 1]$ grafisch dar:

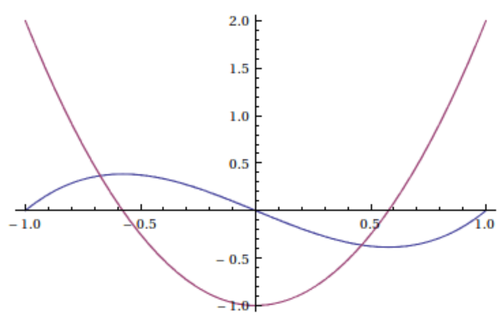
   

   Die Funktionen $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, 5$, sind Tangentengeraden für $f(x)$. Die Steigung der Tangentengerade $y_i(x)$ an der Tangentenstelle ist die Steigung der Funktion $f(x)$. Für $x < -1/\sqrt{3}$ und $x > 1/\sqrt{3}$ ist die Steigung positiv. Für $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ ist die Steigung negativ. Für $x \in \{-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$ ist die Steigung Null.

   (b) Der Befehl

   `Plot[Evaluate[{x^3-x,D[x^3-x,x]}],{x,-1,1}]`

   stellt die Funktionen $f(x) = x^3 - x$ und $f'(x) = 3x^2 - 1$ (=`D[x^3-x,x]`) gemeinsam im Intervall $[-1, 1]$ grafisch dar:

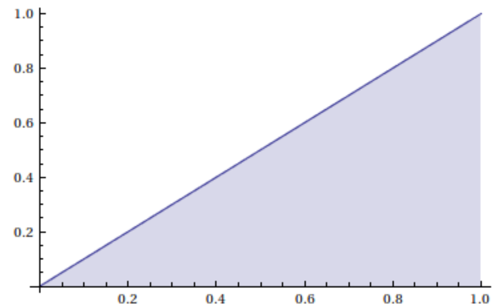
   

   An der Stelle x gibt der Funktionswert von $f'(x)$ die Steigung der Funktion $f(x)$ an. Insbesondere gelten $f'(-1/\sqrt{3}) = f'(1/\sqrt{3}) = 0$. Auch für $x < -1/\sqrt{3}$ und $x > 1/\sqrt{3}$ ist $f'(x)$ positiv und für $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ ist $f'(x)$ negativ.

   (c) Der Befehl

   `Plot[x,{x,0,1}]`

   stellt die Funktion $f(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$ grafisch dar



und der Befehl

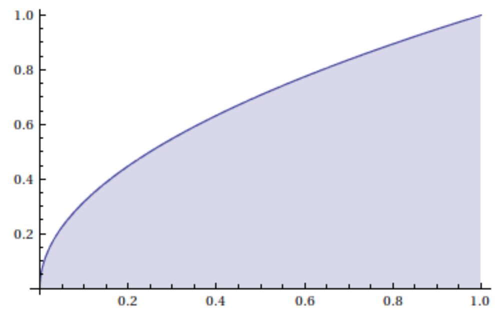
```
Integrate[x,{x,0,1}]
```

berechnet den Flächeninhalt (1/2) des Dreiecks.

(d) Der Befehl

```
Plot[Sqrt[x],{x,0,1}]
```

stellt die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$ grafisch dar



und der Befehl

```
Integrate[Sqrt[x],{x,0,1}]
```

berechnet den Flächeninhalt (2/3) unter der Kurve.

2. Kegelschnitte:

(a) Die Gleichung $1 + 2x + x^2 - 4y + y^2 = 0$ lässt sich durch quadratische Ergänzung so umschreiben:

$$-1 = [x^2 + 2x] + [y^2 - 4y] = [(x + 1)^2 - 1] + [(y - 2)^2 - 4] = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 5$$

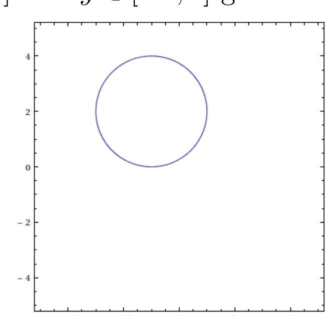
oder

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Der Kegelschnitt ist ein Kreis mit Zentrum $(-1, 2)$ und mit Radius $\sqrt{4} = 2$. Der Befehl

```
ContourPlot[1+2x+x^2-4y+y^2==0,{x,-5,+5},{y,-5,+5}]
```

stellt die Relation für $x \in [-5, 5]$ und $y \in [-5, 5]$ grafisch dar.



(b) Die Gleichung $84 - 8x + 4x^2 + 54y + 9y^2 = 0$ lässt sich durch quadratische Ergänzung so umschreiben:

$$-84 = [4x^2 - 8x] + [9y^2 + 54y] = 4[x^2 - 2x] + 9[y^2 + 6y] = 4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y+3)^2 - 9]$$

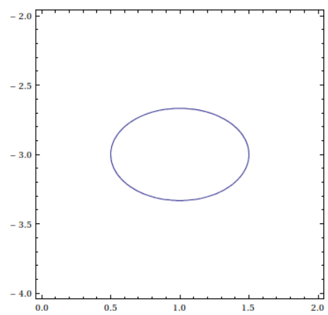
oder

$$4(x-1)^2 + 9(y+3)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{(1/2)^2} + \frac{(y+3)^2}{(1/3)^2} = 1$$

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse mit Zentrum $(1, -3)$ und mit Längen $1/2$ und $1/3$ der $x-$ bzw. $y-$Achsen. Der Befehl

```
ContourPlot[84 - 8 x + 4 x^2 + 54 y + 9 y^2 == 0,{x,0,2},{y,-4,-2}]
```

stellt die Relation für $x \in [0, 2]$ und $y \in [-4, -2]$ grafisch dar.



(c) Die Gleichung $5 = x + 4y - 2y^2$ lässt sich durch quadratische Ergänzung so umschreiben:

$$x - 5 = 2y^2 - 4y = 2[y^2 - 2y] = 2[(y-1)^2 - 1]$$

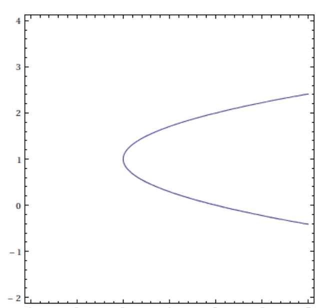
oder

$$x = 2(y-1)^2 + 3$$

Der Kegelschnitt ist eine Parabel mit Scheitel $(3, 1)$ und Ausdehnungsfaktor 2. Der Befehl

```
ContourPlot[x + 4 y - 2 y^2 == 5,{x,1,7},{y,-2,4}]
```

stellt die Relation für $x \in [1, 7]$ und $y \in [-2, 4]$ grafisch dar.



(d) Die Gleichung $78 = -8x + 4x^2 - 54y - 9y^2$ lässt sich durch quadratische Ergänzung so umschreiben:

$$78 = 4[x^2 - 2x] - 9[y^2 + 6y] = 4[(x-1)^2 - 1] - 9[(y+3)^2 - 9]$$

oder

$$4(x-1)^2 - 9(y+3)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{(1/2)^2} - \frac{(y+3)^2}{(1/3)^2} = 1$$

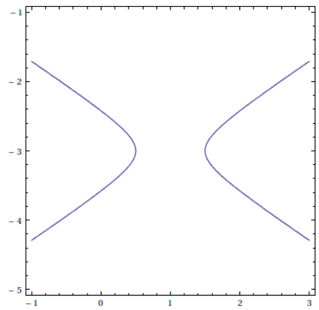
Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel mit Zentrum $(1,-3)$ und mit Asymptoten

$$y = -3 + \tfrac{2}{3}(x-1), \quad y = -3 - \tfrac{2}{3}(x-1)$$

Der Befehl

```
ContourPlot[-8 x + 4 x^2 - 54 y - 9 y^2 == 78, {x,-1,3},{y,-5,-1}]
```

stellt die Relation für $x \in [-1,3]$ und $y \in [-5,-1]$ grafisch dar.

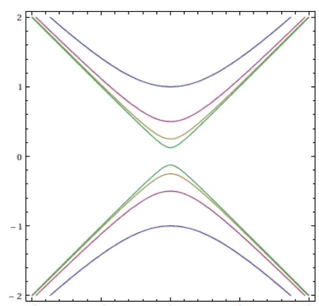


3. Asymptoten einer Hyperbel:

   (a) Der Befehl

```
ContourPlot[{y^2-x^2==1,y^2-x^2==1/4,y^2-x^2==1/16,y^2-x^2==1/64},{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

   stellt die Hyperbel $y^2 - x^2 = r^2$ mit $r = 1, 1/2, 1/4, 1/8$ für $x \in [-2,2]$ und $y \in [-2,2]$ grafisch dar.

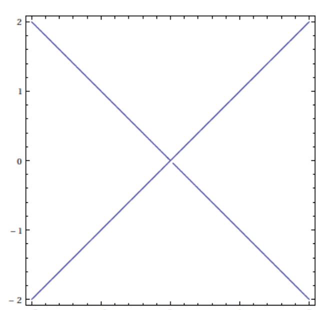


   Für r immer kleiner werden die Asymptoten $y = x$ und $y = -x$ angenähert.

   (b) Der Befehl

```
ContourPlot[y^2-x^2==0,{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

   stellt die Relation $y^2 - x^2 = 0$ für $x \in [-2,2]$ und $y \in [-2,2]$ grafisch dar.



   Die grafische Darstellung der Relation $|y| = |x|$ durch

```
ContourPlot[Abs[y]==Abs[x],{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

ist genau das gleiche. Außerdem aus $y^2 = x^2$ folgt

$$|y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

Analog aus $|y| = |x|$ folgt $y^2 = |y|^2 = |x|^2 = x^2$. D.h. die Relationen sind äquivalent.

(c) Die grafische Darstellung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erscheint oben im Beispiel 1d. Durch Auswertung von $f(x^2) = \sqrt{x^2}$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\sqrt{(-2)^2} & = & 2 & = & |-2| & (\neq & \pm 2) \\
\sqrt{(-1)^2} & = & 1 & = & |-1| & (\neq & \pm 1) \\
\sqrt{(0)^2} & = & 0 & = & |0| & (\neq & \pm 0) \\
\sqrt{(+1)^2} & = & 1 & = & |+1| & (\neq & \pm 1) \\
\sqrt{(+2)^2} & = & 2 & = & |+2| & (\neq & \pm 2)
\end{array}$$

(d) Die Lösungen der Gleichung

$$1 = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

sind

$$\text{falls } x \leq 0: \quad 1 = |x| = -x \quad \text{oder} \quad x = -1$$

und

$$\text{falls } x \geq 0: \quad 1 = |x| = x \quad \text{oder} \quad x = 1$$

d.h. $x \in \{-1, +1\}$. Analog findet man, die Lösungen der Ungleichung $|x| < 1$ sind $x \in (-1, +1)$. Auch durch die stückweise Definition der Betragsfunktion findet man, die Lösungen der Ungleichung $|x| > 1$ sind $x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$.

(e) Anhand der letzten Lösung folgen die Lösungen

$$y \in \{-|x|, +|x|\} = \{-x, +x\}$$

aus $|y| = |x|$, wobei für jedes fixiertes x die zwei Mengen gleich sind, obwohl die zwei Elemente nicht notwendigerweise in der selben Reihenfolge sind. Zwei entsprechende Funktionen sind

$$y_1(x) = -x \quad \text{und} \quad y_2(x) = +x$$

4. Geraden und Betragsfunktionen.

(a) Der Scheitel für $y_1(x) = |x - 2| + 3$ befindet sich bei $(2, 3)$.

(Da $|x - 2| \geq 0$ gilt, folgt $y_1(x) \geq 3$. Da $y_1(2) = 3$ gilt, ist $(2, 3)$ eine Tiefstelle für $y_1(x)$.)

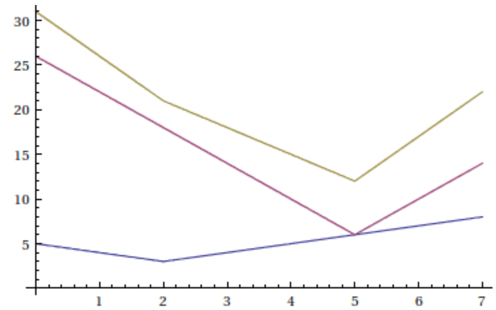
Der Scheitel für $y_2(x) = 4|x - 5| + 6$ befindet sich bei $(5, 6)$.

(Da $|x - 5| \geq 0$ gilt, folgt $y_2(x) \geq 6$. Da $y_1(5) = 6$ gilt, ist $(5, 6)$ eine Tiefstelle für $y_2(x)$.)

(b) Der Befehl

```
Plot[{Abs[x - 2] + 3, 4 Abs[x - 5] + 6, Abs[x - 2] + 3 + 4 Abs[x - 5] + 6}, {x, 0, 7}]
```

stellt die Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ für $x \in [0, 7]$ grafisch dar.



Man merkt den Scheitel $(2,3)$ für $y_1(x)$ in der unterESTEN Kurve, den Scheitel $(5,6)$ für $y_2(x)$ in der mittleren Kurve und $y(x)$ ist die obereste Kurve mit zwei Knicken, die sie von $y_1(x)$ und $y_2(x)$ erbt.

(c) Die Gerade durch $(0,1)$ und $(2,0)$ hat die Steigung

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

Man wählt den Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$ auf der Gerade aus, und mit der allgemeinen Formel $y = s(x - x_0) + y_0$ wird die Gerade folgendermaßen dargestellt.

$$y = -x/2 + 1$$

(d) Durch die stückweise Definition der Betragsfunktion

$$|X| = \begin{cases} -X, & X \leq 0 \\ X, & X \geq 0 \end{cases}$$

lässt sich $y_1(x)$ so darstellen:

$$y_1(x) = 3 + |x-2| = 3 + \begin{cases} -(x-2), & x-2 \leq 0 \\ (x-2), & x-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3-(x-2), & x \leq 2 \\ 3+(x-2), & x \geq 2 \end{cases}$$

Analog lässt sich $y_2(x)$ so darstellen:

$$y_2(x) = 6 + 4|x-5| = 6 + 4\begin{cases} -(x-5), & x-5 \leq 0 \\ (x-5), & x-5 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 6-4(x-5), & x \leq 5 \\ 6+4(x-5), & x \geq 5 \end{cases}$$

Die Teilintervalle zwischen den Scheiteln sind $(-\infty, 2]$, $[2,5]$ und $[5,\infty)$. Bezüglich dieser Teilintervalle lassen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ folgendermaßen so darstellen:

$$y_1(x) = \begin{cases} 3-(x-2), & x \in (-\infty, 2] \\ 3+(x-2), & x \in [2,5] \\ 3+(x-2), & x \in [5,+\infty) \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 6-4(x-5), & x \in (-\infty, 2] \\ 6-4(x-5), & x \in [2,5] \\ 6+4(x-5), & x \in [5,+\infty) \end{cases}$$

(e) Die Summe ist gegeben durch

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \begin{cases} 31-5x, & x \in (-\infty, 2] \\ 27-3x, & x \in [2,5] \\ -13+5x, & x \in [5,+\infty) \end{cases}$$