Lösungen der Beispiele des Vorausgesetzten Wissens für USW IDR, Wintersemester 2016

1. Rechnungen und Vereinfachungen mit Bruchausdrücken

   (a) Äquivalente Notationen für Multiplikation und Division sind:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot x^2 = x^2/2 = x^2 \div 2 = \frac{1}{2} \times x^2$$

$$\frac{x^3+y^3}{3} = \frac{1}{3}(x^3+y^3) = \frac{1}{3} \cdot (x^3+y^3) = (x^3+y^3)/3 = (x^3+y^3) \div 3 = \frac{1}{3} \times (x^3+y^3)$$

$$\frac{x^4+y^4}{x+y} = (x^4+y^4) \div (x+y)$$

$$(x-y) \div \frac{1}{x+y} = \frac{x-y}{1/(x+y)} = (x-y) \times (x+y) = x(x+y) - y(x+y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2$$

   (b) Multiplikation und Division sollen immer vor Addition oder Subtraktion durchgeführt werden, außer ein Ausdruck steht zwischen Klammern:

$$5 \times 60 + 43 \overset{\substack{5\times60\\ \text{zuerst}}}{=} 300 + 43 = 343 \quad \text{und} \quad 5 \times 60 + 43 \overset{\substack{60+43\\ \text{zuerst}}}{\neq} 5 \times 103$$

$$\text{aber } 5 \times (60+43) \overset{\substack{60+43\\ \text{zuerst}}}{=} 5 \times 103 = 515$$

$$43 + 60/5 \overset{\substack{60\div5\\ \text{zuerst}}}{=} 43 + 12 = 55 \quad \text{und} \quad 43 + 60/5 \overset{\substack{43+60\\ \text{zuerst}}}{\neq} 103 \div 5$$

$$\text{aber } (43+60)/5 \overset{\substack{60+43\\ \text{zuerst}}}{=} 103 \div 5 = \frac{103}{5} = 20.6$$

   Weiters hat Potenzierung noch höhere Priorität als Multiplikation oder Division, die höhere Priorität als Addition oder Subtraktion haben, z.B.

$$6 + 2\hat{}8/4 = 6 + 2^8/4 = 6 + \frac{2^8}{4} = 6 + \frac{256}{4} = 6 + 64 = 70$$

   aber

$$4194304 = 8^8/4 = (6+2)\hat{}8/4 \quad \neq \quad 6 + 2\hat{}8/4 \quad \neq \quad 6+2\hat{}(8/4) = 6+2^2 = 6+4 = 10$$

   (c) Wie auf einem üblichen Taschenrechner (oder bei den bekannten Rechensystemen) wird "." (nicht ",") als Dezimalpunkt verstanden, z.B.

$$20.6 = 20 + \frac{6}{10} \quad \text{und} \quad 1000.001 = 1000 + \frac{1}{1000}$$

   (d) Die Zahlen 24 und 30 haben die (Prim-)Faktorisierungen

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad \text{und} \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

   d.h. die (Prim-)Teiler von 24 sind $\{2, 3, 4\}$ und die (Prim-)Teiler von 30 sind $\{2, 3, 5\}$. Daher ist der größte gemeinsame Teiler (ggT) für 24 und 30 gegeben durch $2 \times 3 = 6$. Der Bruch 24/30 lässt sich dann so kürzen,

$$\frac{24}{30} = \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

   und die Brüche lassen sich mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner (kgN) $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ so kombinieren,

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{30} = \frac{1}{6 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{6 \cdot 4} \cdot \frac{5}{5} + \frac{1}{6 \cdot 5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{5+4}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{9}{120} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 40} = \frac{3}{40}$$

(e) Obwohl der Ausdruck $5\frac{4}{5}$ im täglichen Leben oft als “fünf und vier fünftel” (d.h. $5 + \frac{4}{5}$) verstanden wird, ist dies hier nicht der Fall! Laut der obigen Regel gilt hier

$$5\frac{4}{5} = 5 \cdot \frac{4}{5} = 5 \times \frac{4}{5} = \frac{5}{1} \times \frac{4}{5} = 4$$

(f) Die Bruchausdrücke werden so vereinfacht,

$$\begin{aligned}
&5 \text{ und } \frac{4}{5} + 3 \text{ und } \frac{1}{6} - 4 \text{ und } \frac{3}{8} + 2 \text{ und } \frac{7}{12} - 1 \text{ und } \frac{11}{24} \\
&= \left(5 + \frac{4}{5}\right) + \left(3 + \frac{1}{6}\right) - \left(4 + \frac{3}{8}\right) + \left(2 + \frac{7}{12}\right) - \left(1 + \frac{11}{24}\right) \\
&= (5+3-4+2-1) + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6} - \frac{3}{8} + \frac{7}{12} - \frac{11}{24}\right) \\
&= 5 + \left(\frac{96}{120} + \frac{20}{120} - \frac{45}{120} + \frac{70}{120} - \frac{55}{120}\right) = 5 + \frac{86}{120} = 5 + \frac{43}{60} \\
&= \frac{(5 \times 60) + 43}{60} = \frac{343}{60}
\end{aligned}$$

(g) Laut der obigen Regeln bedeuten die Ausdrücke $(\cdots)\frac{4}{9}$ und $(\cdots)/\frac{5}{6}$ hier $(\cdots) \times \frac{4}{9}$ bzw. $(\cdots) \times \frac{6}{5}$ und daher

$$\begin{aligned}
&\left(7 \text{ und } \frac{3}{4} - 4 \text{ und } \frac{3}{8}\right)\frac{4}{9} + \frac{3 \text{ und } \frac{2}{3} + 2 \text{ und } \frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} \\
&= \left(7 + \frac{3}{4} - 4 - \frac{3}{8}\right) \times \frac{4}{9} + \left(3 + \frac{2}{3} + 2 + \frac{7}{12}\right) \times \frac{6}{5} \\
&= \left(7 - 4 + \frac{6-3}{8}\right) \cdot \frac{4}{9} + \left(3 + 2 + \frac{8+7}{12}\right) \cdot \frac{6}{5} = \left(3 + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{4}{9} + \left(5 + \frac{15}{12}\right)\frac{6}{5} \\
&= \frac{3 \cdot 8 + 3}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5 \cdot 12 + 15}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{24+3}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{60+15}{12} \cdot \frac{6}{5} \\
&= \frac{27}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{75}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{27 \cdot 4}{8 \cdot 9} + \frac{75 \cdot 6}{12 \cdot 5} = \frac{108}{72} + \frac{450}{60} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{15}{2} = \frac{3+15}{2} = \frac{18}{2} = 9
\end{aligned}$$

wobei die Notationen “$\times$” und “$\cdot$” nach den obigen Regeln abwechselnd verwendet worden sind.

(h) Für die folgende Vereinfachung faktorisiert man die jeweiligen Nenner, um einen kleinsten gemeinsamen Nenner (kgN) zu finden, und dann führt man Rechnungen durch, die analog zu den obigen sind.

$$\frac{\frac{\frac{11}{15} + \frac{9}{20}}{\frac{7}{12} - \frac{1}{15}} - \frac{9}{31}}{\frac{1}{8} + \frac{\frac{14}{15} + \frac{29}{60}}{\frac{7}{18} + \frac{11}{30}}} = \frac{\frac{\frac{11\times4}{(3\times5)\times4} + \frac{9\times3}{(4\times5)\times3}}{\frac{7\times5}{(3\times4)\times5} - \frac{1\times4}{(3\times5)\times4}} - \frac{9}{31}}{\frac{1}{8} + \frac{\frac{14\times4}{15\times4} + \frac{29}{4\times15}}{\frac{7\times5}{(6\times3)\times5} + \frac{11\times3}{(6\times5)\times3}}} = \frac{\frac{\frac{44+27}{3\times4\times5}}{\frac{35-4}{3\times4\times5}} - \frac{9}{31}}{\frac{1}{8} + \frac{\frac{56+29}{4\times15}}{\frac{35+33}{3\times5\times6}}} = \frac{\frac{\frac{71}{60}}{\frac{31}{60}} - \frac{9}{31}}{\frac{1}{8} + \frac{\frac{85}{60}}{\frac{68}{90}}} = \frac{\frac{71}{60} \times \frac{60}{31} - \frac{9}{31}}{\frac{1}{8} + \frac{85}{60} \times \frac{90}{68}}$$

$$= \frac{\frac{71}{31} - \frac{9}{31}}{\frac{1}{8} + \frac{85\times(3\times30)}{(2\times30)\times68}} = \frac{\frac{62}{31}}{\frac{1}{8} + \frac{85\times3}{2\times68}} = \frac{2}{\frac{1}{8} + \frac{(5\times17)\times3}{2\times(4\times17)}} = \frac{2}{\frac{1}{8} + \frac{15}{8}} = \frac{2}{\frac{16}{8}} = \frac{2}{2} = 1$$

2. Rechnungen von Prozentsätzen

   (a) Das Nettoeinkommen $N =$ €2500 monatlich ist $X\%$ des Bruttoeinkommens $B =$ €4000 monatlich, wobei

   $$X = 100 \times \frac{N}{B} = 100 \cdot \frac{2500}{4000} = 62.5$$

   (b) Die Differenz zwischen der letztendlichen Konzentration $K_2 = 11$ Mol/Liter und der anfänglichen Konzentration $K_1 = 1$ Mol/Liter ist $W = 11 - 1 = 10$, d.h. die *Länge* des Weges von 1 bis 11 ist 10, und

   $$90\% \text{ von } W \text{ ist } \frac{90}{100}W = 0.9W = 0.9 \times 10 = 9$$

   Die Konzentration $K_1 + 9 = 10$ Mol/Liter entspricht daher 90% des Weges von der anfänglichen bis zur letztendlichen.

   (c) Am Anfang wird die Innentemperatur bei $T_1 = 22°$ gemessen, und zu einem späteren Zeitpunkt wird die Innentemperatur bei $T_2 = 15°$ gemessen. Sei T_3 die zu bestimmende Außentemperatur. Die Differenz zwischen der anfänglichen und der letztendlichen Innentemperatur, d.h. die *Länge* des Weges, ist $T_1 - T_3$, und 70% davon ist

   $$\frac{70}{100}(T_1 - T_3) = 0.7(T_1 - T_3)$$

   Die später gemessene Temperatur T_2 erfüllt daher

   $$15 = T_2 = T_1 - 0.7(T_1 - T_3) = 22 - 0.7(22 - T_3)$$

   und die Außentemperatur T_3 ist gegeben durch

   $$15 = 22 - 0.7(22 - T_3) \quad \text{oder} \quad T_3 = 12$$

3. Rechnungen und Vereinfachungen mit Algebraischen Termen

   (a) Mit den obigen Regeln für Multiplikation und mit dem Distributivgesetz

   $$a(b+c) = a \cdot (b+c) = a \times (b+c) = a \times b + a \times c = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$$

   folgt

   $$\begin{aligned} & 15x - 4y + 4z - (2x - 3y - z - (-x + 4y - 3z)) - (5x - y - (2z - 3x) + x) \\ &= 15x - 4y + 4z - 2x + 3y + z + (-x + 4y - 3z) - 5x + y + (2z - 3x) - x \\ &= 15x - 4y + 4z - 2x + 3y + z - x + 4y - 3z - 5x + y + 2z - 3x - x \\ &= x(15 - 2 - 1 - 5 - 3 - 1) + y(-4 + 3 + 4 + 1) + z(4 + 1 - 3 + 2) \\ &= 3x + 4y + 4z \end{aligned}$$

   wobei in den letzten Schritten ähnliche Terme kombiniert worden sind.

   (b) Analog gilt

   $$\begin{aligned} & 5a^2 + b^2 - (3a^2 + 2ab - (2ab - b^2)) \\ &= 5a^2 + b^2 - 3a^2 - 2ab + (2ab - b^2) \\ &= 5a^2 + b^2 - 3a^2 - 2ab + 2ab - b^2 \\ &= a^2(5-3) + b^2(1-1) + ab(-2+2) = 2a^2 \end{aligned}$$

(c) Analog gilt

$$\begin{aligned}
&(9r-7s)(-2)+(3s+4r)(-5)\\
&=9r\times(-2)-7s\times(-2)+3s\times(-5)+4r\times(-5)\\
&=-18r+14s-15s-20r\\
&=r(-18-20)+s(14-15)\\
&=-38r-s
\end{aligned}$$

(d) Mit dem Assoziativgesetz

$$a(bc)=a\cdot(b\cdot c)=a\times(b\times c)=a\times b\times c=(a\times b)\times c=(a\cdot b)\cdot c=(ab)c$$

dem Kommuntativgesetz

$$ab=a\cdot b=a\times b=b\times a=b\cdot a=ba$$

und der Potenzregel

$$a^pa^q=a^p\times a^q=a^{p+q}$$

folgt

$$\begin{aligned}
(3a^2bx^2)(-5a^2b^3x)&=3a^2bx^2(-5)a^2b^3x=(3(-5))(a^2a^2)(b^1b^3)(x^2x^1)\\
&=-15a^{2+2}b^{1+3}x^{2+1}=-15a^4b^4x^3=-15(ab)^4x^3
\end{aligned}$$

(e) Analog gilt

$$\begin{aligned}
&(2x^3-5x^2y+4xy^2-3y^2)(3x^2+2xy-y^2)\\
&=2x^3(3x^2+2xy-y^2)-5x^2y(3x^2+2xy-y^2)+4xy^2(3x^2+2xy-y^2)-3y^2(3x^2+2xy-y^2)\\
&=6x^5+4x^4y-2x^3y^2-15x^4y-10x^3y^2+5x^2y^3+12x^3y^2+8x^2y^3-4xy^4-9x^2y^2-6xy^3+3y^4\\
&=6x^5+x^4y(4-15)+x^3y^2(-2-10+12)-9x^2y^2+x^2y^3(5+8)-6xy^3-4xy^4+3y^4\\
&=6x^5-11x^4y-9x^2y^2+13x^2y^3-6xy^3-4xy^4+3y^4
\end{aligned}$$

(f) Man kann das folgende Beispiel analog durch Ausmultiplizieren vereinfachen, aber mit der Potenzregel

$$(ab)^p=a^pb^p \quad \text{und insbesondere} \quad (-a)^2=((-1)\times a)^2=(-1)^2a^2=a^2$$

folgt

$$(5x-4y)^2-(-5x+4y)^2=(5x-4y)^2-(5x-4y)^2=0$$

(g) Die Binomialformel sieht für einige Potenzen so aus:

$$\begin{array}{lcll}
(a+b)^1 & = & 1a+1b & \\
(a+b)^2 & = & 1a^2+2ab+1b^2 & 2=1+1\text{, obige Koeffizienten}\\
(a+b)^3 & = & 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3 & 3=1+2, 3=2+1,\text{, obige Koeffizienten}\\
(a+b)^4 & = & 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4 & 4=1+3=3+1, 6=3+3\text{, obige Koeffizienten}\\
\vdots & & \vdots &
\end{array}$$

wobei die Koeffizienten für eine Potenz gegeben sind durch Summen der ober stehenden Koeffizienten für die letzte Potenz. Insbesondere für die Potenz n auf der linken Seite seien die Terme in der Summe auf der rechten Seite mit der Potenz k von b markiert, d.h.

$$(a+b)^n=Q_0a^nb^0+\cdots+Q_ka^{n-k}b^k+\cdots+Q_na^0b^n$$

und der Koeffizient Q_k ist gegeben durch den sogenannten Binomialkoeffizienten

$$Q_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{wobei} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

Die Beziehung zwischen Koeffizienten für eine Potenz n lässt sich mit Potenzen für $n-1$ durch eine direkte Rechnung so darstellen,

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$$

Analog mit $b = -c$,

$$\begin{array}{rcc} (a-c)^1 & = & 1a - 1c \\ (a-c)^2 & = & 1a^2 - 2ac + 1c^2 \\ (a-c)^3 & = & 1a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - 1c^3 \\ (a-c)^4 & = & 1a^4 - 4a^3c + 6a^2c^2 - 4ac^3 + 1c^4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

(h) Mit $n = 3$, $a = 2x$ und $b = 3y$ folgt mit der Binomialformel,

$$(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$$

$$= 2^3 \cdot x^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot x^2y + 3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot xy^2 + 3^3 \cdot y^3$$

$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

(i) Mit der Potenzregel $a^{p+q} = a^pa^q$ und dem Distributivgesetz $ab + ac = a(b+c)$ kann das folgende Beispiel durch Faktorisierung vereinfacht werden

$$\frac{36x^4y^3z^2 - 42x^4y^5z^6 + 18x^5y^4z^3 - 48x^3y^6z^5}{6x^3y^3z^2}$$

$$= \frac{6 \cdot 6x^{1+3}y^3z^2 - 6 \cdot 7x^{1+3}y^{2+3}z^{4+2} + 6 \cdot 3x^{2+3}y^{1+3}z^{1+2} - 6 \cdot 8x^3y^{3+3}z^{3+2}}{6x^3y^3z^2}$$

$$= \frac{6x^3y^3z^2(6x^1 - 7x^1y^2z^4 + 3x^2y^1z^1 - 8y^3z^3)}{6x^3y^3z^2}$$

$$= \frac{6x^3y^3z^2}{6x^3y^3z^2} \times \frac{6x - 7xy^2z^4 + 3x^2yz - 8y^3z^3}{1} = 6x - 7xy^2z^4 + 3x^2yz - 8y^3z^3$$

(j) Analog gilt

$$\frac{6a^4 - 9a^3 + 12a^2 - 15a}{3a} = \frac{3 \times 2 \cdot a^{1+3} - 3 \times 3 \cdot a^{1+2} + 3 \times 4 \cdot a^{1+1} - 3 \times 5 \cdot a}{3a}$$

$$= \frac{3a(2a^3 - 3a^2 + 4a^1 - 5)}{3a} = \frac{3a}{3a} \times \frac{2a^3 - 3a^2 + 4a - 5}{1} = 2a^3 - 3a^2 + 4a - 5$$

4. Herausheben und Dividieren

   (a) Mit dem Distributivgesetz $ab + ac = a(b + c)$

$$5k + 5m + 5 = 5(k + m + 1)$$

   (b) Auch mit der Potenzregel $a^{p+q} = a^p a^q$

$$36k^3 + 27k^2 - 18k = 9 \cdot 4 \cdot k^{1+2} + 9 \cdot 3 \cdot k^{1+1} - 9 \cdot 2 \cdot k = 9k \cdot (4k^2 + 3k - 2)$$

   (c) Mit dem Distributivgesetz $xy + xz = x(y + z)$ folgt mit $-(a - b) = -a + b$

$$(a - b)c - a + b = (a - b)c - (a - b) = (a - b)(c - 1)$$

   (d) Der Quotient

$$(10x^2 + 29xy - 21y^2) \div (5x - 3y) \quad \text{oder} \quad \frac{10x^2 + 29xy - 21y^2}{5x - 3y}$$

   lässt sich durch Polynomdivision vereinfachen,

$$\begin{array}{cccccccc}
 & (10x^2 & +29xy & -21y^2) & \div & (5x - 3y) & = & (2x + 7y) \\
\ominus & 10x^2 & -6xy & & & & \leftarrow & (5x - 3y)2x \\
\hline
 & 0 & 35xy & -21y^2 & & & & \\
\ominus & & 35xy & -21y^2 & & & \leftarrow & (5x - 3y)7y \\
\hline
 & & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

   oder

$$\frac{10x^2 + 29xy - 21y^2}{5x - 3y} = 2x + 7y$$

   (e) Analog lässt sich der Quotient

$$(3k^3 + 8k^2 - 5k - 6) \div (3k + 2) \quad \text{oder} \quad \frac{3k^3 + 8k^2 - 5k - 6}{3k + 2}$$

   durch Polynomdivision vereinfachen,

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & (3k^3 & +8k^2 & -5k & -6) & \div & (3k + 2) & = & (k^2 + 2k - 3) \\
\ominus & 3k^3 & +2k^2 & & & & & \leftarrow & (3k + 2)k^2 \\
\hline
 & 0 & 6k^2 & -5k & -6 & & & & \\
\ominus & & 6k^2 & +4k & & & & \leftarrow & (3k + 2)2k \\
\hline
 & & 0 & -9k & -6 & & & & \\
\ominus & & & -9k & -6 & & & \leftarrow & (3k + 2)(-3) \\
\hline
 & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

   oder

$$\frac{3k^3 + 8k^2 - 5k - 6}{3k + 2} = k^2 + 2k - 3$$

5. Algebraische Lösung von Gleichungen

   (a) Mit dem Distributivgesetz $xy + xz = x(y + z)$ wird die rechte Seite so vereinfacht,

$$2x - 12 = 7x - (1 - 3x - (4 - 5x))$$

$$= 7x - 1 + 3x + (4 - 5x) = 7x - 1 + 3x + 4 - 5x$$

Dann subtrahiert man $2x - 12$ von beiden Seiten der letzten Gleichung,

$$0 = (2x - 12) - (2x - 12) = (7x - 1 + 3x + 4 - 5x) - (2x - 12)$$

und gruppiert die ähnlichen Terme der rechten Seite dieser Gleichung zusammen,

$$0 = x(-2 + 7 + 3 - 5) + (12 - 1 + 4) = 3x + 15$$

Um nach x aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} 0 = 3x + 15 & -15 \\ -15 = 3x & \div 3 \\ -5 = -15/3 = x & \end{array}$$

und die Lösung ist $x = -5$.

(b) Analog wird hier die linke Seite

$$3(2x - 8) - 2(4 - 3x) = 20x$$

so vereinfacht

$$6x - 24 - 8 + 6x = 3 \cdot 2 \cdot x - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-3)x = 3(2x - 8) - 2(4 - 3x) = 20x$$

Dann subtrahiert man $20x$ von beiden Seiten dieser Gleichung und gruppiert die ähnlichen Terme zusammen,

$$-8x - 32 = x(6 + 6 - 20) + (-24 - 8) = 6x - 24 - 8 + 6x - 20x = 20x - 20x = 0$$

Um nach x aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} -8x - 32 = 0 & +32 \\ -8x = 32 & \div(-8) \\ x = -32/8 = -4 & \end{array}$$

und die Lösung ist $x = -4$.

(c) Um diese Gleichung zu vereinfachen

$$x(x - 4) + 2x^2 = 3(x + 2)(x - 3)$$

werden beide Seiten zuerst ausmultipliziert, und ähnliche Terme werden kombiniert,

$$x(x - 4) + 2x^2 = x^2 - 4x + 2x^2 = 3x^2 - 4x$$

$$3(x + 2)(x - 3) = 3(x(x-3)+2(x-3)) = 3(x^2-3x+2x-6) = 3(x^2-x-6) = 3x^2 - 3x - 18$$

Um nach x in der sich ergebenen Gleichung aufzulösen,

$$3x^2 - 4x = 3x^2 - 3x - 18$$

führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 4x = 3x^2 - 3x - 18 & -3x^2 + 4x \\ 0 = (3x^2 - 4x) - (3x^2 - 4x) = (3x^2 - 3x - 18) - (3x^2 - 4x) = x - 18 & +18 \\ 18 = x & \end{array}$$

und die Lösung ist $x = 18$.

(d) Um diese Gleichung zu vereinfachen

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = 3(x+4)^2$$

werden beide Seite zuerst ausmultipliziert, und ähnliche Terme werden kombiniert,

$$\begin{array}{rl}
(x+1)^2 = & x^2 + 2x + 1 \\
(x+2)^2 = & x^2 + 4x + 4 \\
(x+3)^2 = & x^2 + 6x + 9 \\
\hline
\oplus = & {\color{blue}3x^2 + 12x + 14}
\end{array}$$

$$3(x+4)^2 = 3(x^2 + 8 + 16) = {\color{cyan}3x^2 + 24x + 48}$$

Um nach x in der sich ergebenen Gleichung aufzulösen,

$${\color{blue}3x^2 + 12x + 14} = {\color{cyan}3x^2 + 24x + 48}$$

führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l}
3x^2 + 12x + 14 = 3x^2 + 24x + 48 & -(3x^2 + 12x + 14) \\
0 = (3x^2 + 12x + 14) - (3x^2 + 12x + 14) = (3x^2 + 24x + 48) - (3x^2 + 12x + 14) = 12x + 34 & -34 \\
-34 = 12x & \div 12 \\
-17/6 = -34/12 = x &
\end{array}$$

und die Lösung ist $x = -17/6$.

(e) Für gegebene Zahlen a, b, c hat die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

die Lösungen

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es gibt auch Lösungsformeln für kubische ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) und biquadratische ($ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$) Gleichungen, die man nachschlagen kann, aber es existieren keine Lösungsformeln für Gleichungen höherer Ordnung!

(f) Anhand der obigen Lösungsformeln sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = 3$$

Man kann die linke Seite der quadratischen Gleichung auch so faktorisieren,

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6 = 0$$

und dann muss entweder $(x-2) = 0$ oder $(x-3) = 0$ gelten, d.h. die Lösungen sind $x = 2$ oder $x = 3$, wie schon mit den Lösungsformeln vorher berechnet.

(g) Anhand der obigen Lösungsformeln sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$${\color{gray}x^2/3 - 17x/36 - 11/4 =} \frac{x^2}{3} - \frac{17x}{36} - \frac{11}{4} = 0$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{\frac{17}{36} - \sqrt{(\frac{17}{36})^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{11}{4})}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{9}{4} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\frac{17}{36} + \sqrt{\frac{17^2}{36^2} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{11}{4})}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{11}{3}$$

(h) Um nach x in der Gleichung aufzulösen,

$$(2x-3)^2 + (2x-4)^2 = 4(x-1)^2$$

summiert man die folgenden Erweiterungen der linken Seite

$$\begin{array}{rcl} (2x-3)^2 & = & 4x^2 - 12x + 9 \\ (2x-4)^2 & = & 4x^2 - 16x + 16 \\ \hline \oplus & = & 8x^2 - 28x + 25 \end{array}$$

und subtrahiert von diesem Ergebnis die Erweiterung der rechten Seite

$$\begin{array}{rcl} (2x-3)^2 + (2x-4)^2 & = & 8x^2 - 28x + 25 \\ 4(x-1)^2 & = & 4x^2 - 8x + 4 \\ \hline \ominus & = & 4x^2 - 20x + 21 \end{array}$$

Anhand der obigen Lösungsformeln sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(2x-3)^2 + (2x-4)^2 - 4(x-1)^2 = \quad 4x^2 - 20x + 21 = 0$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{20 - \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 21}}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{20 + \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 21}}{2 \cdot 4} = \frac{7}{2}$$

(i) Um nach x in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{3x+2}{x-9} - \frac{1-2x}{x+3} = \frac{19}{(x-9)(x+3)}, \quad x \neq -3, 9$$

multipliziert man zuerst beide Seiten mit $(x-9)(x+3)$ und bekommt

$$(3x+2)(x+3) - (1-2x)(x-9) = (3x+2)\frac{x-9}{x-9}(x+3) - (1-2x)\frac{x+3}{x+3}(x-9) = 19\frac{(x-9)(x+3)}{(x-9)(x+3)} = 19$$

Für die linke Seite subtrahiert man die Erweiterungen,

$$\begin{array}{rcl} (3x+2)(x+3) = 3x(x+3) + 2(x+3) = 3x^2 + 9x + 2x + 6 & = & 3x^2 + 11x + 6 \\ (1-2x)(x-9) = 1(x-9) - 2x(x-9) = x - 9 - 2x^2 + 18x & = & -2x^2 + 19x - 9 \\ \hline \ominus & = & 5x^2 - 8x + 15 \end{array}$$

Anhand der obigen Lösungsformeln sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(3x+2)(x+3) - (1-2x)(x-9) - 19 = \quad 5x^2 - 8x + 15 - 19 = 5x^2 - 8x - 4 = 0$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = -\frac{2}{5} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = 2$$

6. Erweitern und Kürzen von Brüchen

(a) Um nach u in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{5x-1}{2x-3} = \frac{u}{x(2x-3)^2}, \quad x \neq 0, \frac{3}{2}$$

multipliziert man auf beiden Seiten mit $x(2x-3)^2$,

$$x(5x-1)(2x-3) = x(5x-1)\frac{(2x-3)^2}{(2x-3)} = \frac{5x-1}{2x-3}x(2x-3)^2 = \frac{u}{x(2x-3)^2}x(2x-3)^2 = u\frac{x\,(2x-3)^2}{x\,(2x-3)^2} = u$$

oder $u = x(5x-1)(2x-3) = 10x^3 - 17x^2 + 3x$.

(b) Die Faktorisierung der Differenz von gleichen Potenzen ist für einige Potenzen,

$$\begin{array}{rcc} a^2-b^2 &=& (a-b)(a+b) \\ a^3-b^3 &=& (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^4-b^4 &=& (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \\ a^5-b^5 &=& (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

und daher für $a \neq b$,

$$\begin{array}{rcc} \frac{a^2-b^2}{a-b} &=& (a+b) \\ \frac{a^3-b^3}{a-b} &=& (a^2+ab+b^2) \\ \frac{a^4-b^4}{a-b} &=& (a^3+a^2b+ab^2+b^3) \\ \frac{a^5-b^5}{a-b} &=& (a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

oder mit $b = -c$,

$$\begin{array}{rcc} a^2-c^2 &=& (a+c)(a-c) \\ a^3+c^3 &=& (a+c)(a^2-ac+c^2) \\ a^4-c^4 &=& (a+c)(a^3-a^2c+ac^2-c^3) \\ a^5+c^5 &=& (a+c)(a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3+c^4) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

(c) Um nach v in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{x+y}{6a(x-y)} = \frac{v}{48a^3(x^2-y^2)}, \quad x \neq \pm y, \quad a \neq 0$$

multipliziert man auf beiden Seiten mit $48a^3(x^2-y^2)$ und verwendet die (obige) Faktorisierung, $(x^2-y^2) = (x-y)(x+y)$,

$$8a^2(x+y)^2 = \frac{48a^3}{6a}\frac{(x+y)((x-y)(x+y))}{(x-y)} = \frac{x+y}{6a(x-y)}48a^3\underbrace{(x^2-y^2)}_{(x-y)(x+y)} = \frac{v}{48a^3(x^2-y^2)}48a^3(x^2-y^2) = v$$

oder $v = 8a^2(x+y)^2 = 8a^2(x^2+2xy+y^2) = 8a^2x^2+16a^2xy+8a^2y^2$.

(d) Mit den Potenzregeln

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p} \quad \text{und} \quad a^pa^q = a^{p+q}$$

lässt sich der Quotient so vereinfachen,

$$\frac{18x^3y^2}{24x^2y} = \frac{18}{24}x^3x^{-2}y^2y^{-1} = \frac{3}{4}x^{3-2}y^{2-1} = \frac{3}{4}xy$$

(e) Mit der (obigen) Faktorisierung, $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$, $A = 3a$, $B = b$,

$$\frac{6a^2b+2ab^2}{18a^2-2b^2} = \frac{2ab}{2}\frac{(3a+b)}{(9a^2-b^2)} = ab\frac{(3a+b)}{(3a+b)(3a-b)} = \frac{ab}{3a-b}$$

(f) Mit der Faktorisierung $(x^2-9)=(x-3)(x+3)$ und der Binomialformel $(x-3)^2 = x^2+2x(-3)+(-3)^2 = x^2-6x+9$ folgt

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$$

7. Faktorisierung und Vereinfachung

(a) Hier ist $6xy^3$ ein Faktor der beiden Terme, und daher kann er herausgehoben werden,

$$6x^2y^3+18xy^4 = 6\cdot x^{1+1}y^3+6\cdot 3\cdot xy^{3+1} = 6\cdot x\cdot x\cdot y^3+6\cdot 3\cdot x\cdot y^3\cdot y = 6xy^3(x+3y)$$

(b) Mit der (obigen) Faktorisierung, $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, $A=7x$, $B=6y$,

$$49x^2-36y^2=(7x-6y)(7x+6y)$$

(c) Mit der Binomialformel $(x-2)^2=x^2+2x(-2)+(-2)^2=x^2-4x+4$ und

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

(d) Mit der (obigen) Faktorisierung

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a^3-b^3)$$

(e) Mit der (obigen) Faktorisierung

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x^2+y^2)$$

(f) Mit dem kleinsten gemeinsamen Nennen (kgN) $12a^2b^2$ schreibt man die Kette von Brüchen als *ein* Bruch,

$$\frac{4a-9b}{2ab}-\frac{b+2a}{12a^2}-\frac{a-7b}{4b^2} = \frac{4a-9b}{2ab}\frac{6ab}{6ab}-\frac{b+2a}{12a^2}\frac{b^2}{b^2}-\frac{a-7b}{4b^2}\frac{3a^2}{3a^2}$$

$$= \frac{24a^2b-54ab^2}{12a^2b^2}-\frac{b^3+2ab^2}{12a^2b^2}-\frac{3a^3-21a^2b}{12a^2b^2} = \frac{-3a^3+a^2b(24+21)+ab^2(-54-2)-b^3}{12a^2b^2}$$

$$= \frac{-3a^2+45a^2b-56ab^2-b^3}{12a^2b^2}$$

(g) Analog mit $(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)$ und $(x^3+y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$,

$$\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}-\frac{3y}{y^2-x^2}+\frac{xy}{x^3+y^3} = \frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{3y}{x^2-y^2}+\frac{xy}{x^3+y^3}$$

$$= \frac{2}{(x+y)}\frac{x-y}{(x-y)}-\frac{1}{(x-y)}\frac{x+y}{(x+y)}+\frac{3y}{(x-y)(x+y)}+\frac{xy}{x^3+y^3}$$

$$= \frac{2x-2y-x-y+3y}{(x-y)(x+y)}+\frac{xy}{x^3+y^3} = \frac{x}{(x-y)(x+y)}+\frac{xy}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

$$= \frac{x}{x+y}\left[\frac{1}{x-y}+\frac{y}{x^2-xy+y^2}\right] = \frac{x}{x+y}\left[\frac{(x^2-xy+y^2)+y(x-y)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}\right]$$

wobei zwischen den eckigen Klammern verwendet worden ist,

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{AD}$$

wenn B und D keine gemeinsamen Faktoren besitzen. Die Fortsetzung der Vereinfachung ist

$$\frac{x}{x+y}\left[\frac{(x^2-xy+y^2)+y(x-y)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}\right]=\frac{x}{x+y}\left[\frac{x^2-xy+y^2+xy-y^2)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}\right]=$$

$$\frac{x}{x+y}\left[\frac{x^2}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}\right]=\frac{x^3}{(x-y)[(x+y)(x^2-xy+y^2)]}=\frac{x^3}{(x-y)(x^3+y^3)}$$

wobei die Faktorisierung $(x^3+y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ im letzten Schritt verwendet worden ist.

(h) Der gemeinsame Faktor $1/a$ in den beiden Termen wird zuerst herausgehoben,

$$\frac{1}{a^2-a}+\frac{1}{a^2+a}=\frac{1}{a(a-1)}+\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right]$$

und dann verwendet man die obige Formel $A/B+C/D=(AD+BC)/(AD)$ mit $A=C=1$, $B=a-1$, $D=a+1$,

$$\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right]=\frac{1}{a}\left[\frac{(a+1)+(a-1)}{(a-1)(a+1)}\right]=\frac{2a}{a(a^2-1)}=\frac{2}{a^2-1}$$

wobei die Faktorisierung $a^2-1=(a-1)(a+1)$ verwendet worden ist.

(i) Durch die Formel

$$\frac{A/B}{C/D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$$

folgt

$$\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{4x^2}}\frac{1+x}{1-x}=\left[\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{4x^2}}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\left[\frac{x-1}{x}\frac{4x^2}{x^2-1}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$=\left[\frac{x-1}{x}\frac{4x^2}{(x-1)(x+1)}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\left[\frac{4x^2}{x}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)\frac{1}{x+1}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$=\frac{4x}{x+1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{4x}{1-x}\left(\frac{1+x}{x+1}\right)=\frac{4x}{1-x}$$

wobei die Faktorisierung $x^2-1=(x-1)(x+1)$ verwendet worden ist.

8. Bruchgleichungen

(a) Um nach $x\neq 6$ in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{5}{x-6}=\frac{5}{2}$$

führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{aligned}\frac{5}{x-6}&=\frac{5}{2} && \Big|\ \div 5\\ \frac{1}{x-6}=\frac{5}{x-6}\times\frac{1}{5}=\frac{5}{2}\times\frac{1}{5}&=\frac{1}{2} && \Big|\ \times 2(x-6)\\ 2=\frac{1}{x-6}\times 2(x-6)=\frac{1}{2}\times 2(x-6)&=x-6 && \Big|\ +6\\ 8=2+6&=x && \Big|\end{aligned}$$

und die Lösung ist $x=8$.

(b) Um nach x in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{3}{2x-1} = \frac{2}{x+3}, \quad x \neq -3, \frac{1}{2}$$

führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{rl|l} & \dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{2}{x+3} & \times(2x-1)(x+3) \\ 3(x+3) = \dfrac{3}{2x-1} \times (2x-1)(x+3) = & \dfrac{2}{x+3} \times (2x-1)(x+3) = 2(2x-1) & -3(x+3) \\ 0 = 3(x+3) - 3(x+3) = & 2(2x-1) - 3(x+3) = x - 11 & +11 \\ & 11 = x & \end{array}$$

und die Lösung ist $x = 11$.

(c) Anhand der Formel $A/B + C/D = (AD + BC)/(AD)$ mit $A = 5$, $B = (x-2)$, $C = -3$ und $D = (x+2)$ lässt sich die linke Seite der Gleichung

$$\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+8)}{x^2-4}$$

so umschreiben,

$$\frac{2x+16}{x^2-4} = \frac{5x+10-3x+6}{x^2-4} = \frac{5(x+2)-3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+8)}{x^2-4} = \frac{2x+16}{x^2-4}$$

und diese Gleichung gilt für ein beliebiges $x \neq \pm 2$.

9. Rechnen mit Potenzen

(a) Mit den obigen Potenzformeln $a^p a^q = a^{p+q}$ und $a^{-p} = 1/a^p$ folgen

$$a^{x+2y}a^{3x+2z} = a^{(x+2y)+(3x+2z)} = a^{4x+2y+2z} = a^{2(2x+y+z)}$$

und

$$\frac{a^{x+2y}}{a^{3x+2z}} = a^{x+2y}a^{-(3x+2z)} = a^{(x+2y)-(3x+2z)} = a^{-2x+2y-2z} = a^{-2(x-y+z)}$$

(b) Mit der Faktorisierung $(A^2 - B^2) = (A-B)(A+B)$, $A = x^a$, $B = y^b$, kann der Ausdruck

$$(x^a - y^b)(x^a + y^b) - (x^a - y^b)^2$$

zuerst so vereinfacht werden,

$$(x^a - y^b)(x^a + y^b) - (x^a - y^b)^2 = (x^{2a} - y^{2b}) - (x^a - y^b)^2$$

Mit der Erweiterung $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, kann so weiter vereinfacht werden

$$(x^{2a} - y^{2b}) - (x^a - y^b)^2 = x^{2a} - y^{2b} - (x^{2a} - 2x^a y^b + y^{2b}) = 2x^a y^b - 2y^{2b}$$

(c) Mit der Potenzregel $(A/B)^p = A^p/B^p$ können die Potenzen der Quotienten so vereinfacht werden,

$$\left(\frac{a^2-b^2}{x+y}\right)^n \left(\frac{x+y}{a+b}\right)^n = \frac{(a^2-b^2)^n}{(x+y)^n}\frac{(x+y)^n}{(a+b)^n} = \frac{((a-b)(a+b))^n}{(x+y)^n}\frac{(x+y)^n}{(a+b)^n}$$

wobei die Faktorisierung $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ verwendet worden ist. Um weiter zu vereinfachen, wird die Reihenfolge der Terme so geändert,

$$\frac{((a-b)(a+b))^n}{(x+y)^n}\frac{(x+y)^n}{(a+b)^n} = \frac{(a-b)^n(a+b)^n}{(a+b)^n}\frac{(x+y)^n}{(x+y)^n} = (a-b)^n$$

wobei die Potenzregel $(AB)^p = A^p B^p$ verwendet worden ist.

(d) Mit der Potenzregel $(A^p)^p = A^{p\cdot q}$ können die Terme so vereinfacht werden,

$$\begin{aligned}((a^{+2})^{-4})^{-3} - ((a^{-8})^{-1})^{+3} &= (a^{(+2)\cdot(-4)})^{-3} - (a^{(-8)\cdot(-1)})^{+3} \\ &= (a^{-8})^{-3} - (a^{+8})^{+3} \\ &= a^{(-8)\cdot(-3)} - a^{(+8)\cdot(+3)} \\ &= a^{24} - a^{24} = 0\end{aligned}$$

(e) Mit der Potenzregel $A^p/A^q = A^{p-q}$ können die Terme so vereinfacht werden,

$$\frac{a^x b^y (b-1)}{a^{x-1} b^{y-1} (1-b)^2} = \frac{a^x}{a^{x-1}} \frac{b^y}{b^{y-1}} \frac{b-1}{(1-b)^2} = a^{x-(x-1)} b^{y-(y-1)} \frac{b-1}{(b-1)^2}$$

wobei $(-A)^2 = ((-1)\cdot A)^2 = (-1)^2 A^2 = A^2$ oder $(1-b)^2 = (b-1)^2$ verwendet worden ist. Es kann dann weiter vereinfacht werden,

$$a^{x-(x-1)} b^{y-(y-1)} \frac{b-1}{(b-1)^2} = \frac{ab}{(b-1)^{2-1}} = \frac{ab}{b-1}$$

10. Textaufgabe mit Gleichungen, Beträgen und Ungleichungen

Jemand hat die Wahl zwischen zwei Stromtarifen: Entweder (1) monatlich €8 Grundgebühr und €0,10 pro kWh oder (2) kein Grundgebühr und €0,18 pro kWh.

(a) Bei welchem monatlichen Stromverbrauch sind die Kosten bei beiden Tarifen gleich?

Sei x der monatliche Stromverbrauch in kWh. Bei dem ersten Stromtarif sind die monatlichen Kosten €$(8 + 0.1x)$. Bei dem zweiten Stromtarif sind die monatlichen Kosten €$(0.18x)$. Die monatlichen Kosten für beide Tarife sind gleich wenn

$$8 + 0.1x = 0.18x$$

Um nach x in dieser Gleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} 8 + 0.1x = 0.18x & -0.1x \\ 8 = 8 + 0.1x - 0.1x = 0.18x - 0.1x = 0.08x & \div 0.08 \\ 100 = 8/0.08 = 0.08x/0.08 = x & \end{array}$$

und die Lösung ist $x = 100$.

(b) Bei welchem beträgt der Unterschied €10?

Falls x so ist, dass die monatlichen Kosten beim ersten Stromtarif €$(8+0.1x)$ größer sind als beim zweiten Stromtarif €$(0.18x)$, ist die €Differenz der monatlichen Kosten gegeben durch

$$(8 + 0.1x) - (0.18x)$$

Diese Differenz beträgt €10 wenn

$$8 - 0.08x = 8 + 0.1x - 0.18x = 10$$

Um nach x in dieser Gleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} 8 - 0.08x = 10 & -8 \\ -0.08x = 8 - 0.08x - 8 = 10 - 8 = 2 & \div(-0.08) \\ x = -0.08x/(-0.08) = 2/(-0.08) = -25 & \end{array}$$

und die rein mathematische Lösung $x = -25$ für diesen Fall ist nicht sinnvoll. Folglich ist die Annahme falsch, dass es ein $x \geq 0$ gibt, wobei die monatlichen Kosten beim ersten Stromtarif größer als bei zweiten Stromtarif sind.

Falls x so ist, dass die monatlichen Kosten beim zweiten Stromtarif €$(0.18x)$ größer sind als beim ersten Stromtarif €$(8+0.1x)$, ist die €Differenz der monatlichen Kosten gegeben durch

$$(0.18x) - (8 + 0.1x)$$

Diese Differenz beträgt €10 wenn

$$0.08x - 8 = 0.18x - 8 - 0.1x = 10$$

Um nach x in dieser Gleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} 0.08x - 8 = 10 & +8 \\ 0.08x = 0.08x - 8 + 8 = 10 + 8 = 18 & \div 0.08 \\ x = 0.08x/0.08 = 18/0.08 = 225 & \end{array}$$

und die Lösung $x = 225$ ist sinnvoll. Folglich ist die Annahme wahr, dass es ein $x \geq 0$ gibt, wobei die monatlichen Kosten beim zweiten Stromtarif größer als bei ersten Stromtarif sind. Die Antwort ist 225 kWh.

Die €Differenz zwischen den monatlichen Kosten kann auch mit dem Betrag so dargestellt werden,

$$|8 + 0.1x - 0.18x| = |8 - 0.08x|$$

und diese Differenz beträgt €10 wenn

$$|8 - 0.08x| = 10$$

Falls $8 - 0.08x > 0$ gilt, folgt $|8 - 0.08x| = 8 - 0.08x$, und es gilt $10 = |8 - 0.08x| = 8 - 0.08x$, wenn sinnloserweise $x = -25$ gilt, wie im ersten Fall oben gesehen. Falls $8 - 0.08x < 0$ gilt, folgt $|8 - 0.08x| = -(8 - 0.08x)$, und es gilt $10 = |8 - 0.08x| = -(8 - 0.08x) = 0.08x - 8$, wenn $x = 225$ gilt, wie im zweiten Fall oben gesehen. Die Lösung ist dann $x = 225$.

(c) Bei welchem ist der erste, bei welchem der zweite Tarif günstiger?

Die monatlichen Kosten beim ersten Stromtarif €$(8 + 0.1x)$ sind größer als beim zweiten Stromtarif €$(0.18x)$, wenn diese €Differenz positiv ist:

$$8 - 0.08x = (8 + 0.1x) - (0.18x) > 0$$

Um nach x in dieser Ungleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{rcr|l} 8 - 0.08x & > & 0 & -8 \\ -0.08x = 8 - 0.08x - 8 & > & 0 - 8 = -8 & \div(-0.08) \\ x = -0.08x/(-0.08) & < & -8/(-0.08) = 100 & > \to <! \end{array}$$

Man merkt hier, wenn eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert wird, wird die Richtung der Ungleichung geändert, z.B. in diesem Fall bei Division durch -0.08 ist $-0.08x > -8$ zu $x < 100$ geworden. Die Lösung ist ist $x < 100$, d.h. wenn der monatliche Stromverbrauch kleiner als 100 kWh ist, sind die monatlichen Kosten beim ersten Stromtarif größer als beim zweiten Stromtarif, und in diesem Fall ist der zweite Stromtarif günstiger.

Die monatlichen Kosten beim zweiten Stromtarif €$(0.18x)$ sind größer als beim ersten Stromtarif €$(8+0.1x)$, wenn diese €Differenz positiv ist:

$$0.08x - 8 = (0.18x) - (8 + 0.1x) > 0$$

Um nach x in dieser Ungleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{rcl|l} 0.08x - 8 & > & 0 & +8 \\ 0.08x = 0.08x - 8 + 8 & > & -8 & \div 0.08 \\ x = 0.08x/0.08 & > & -8/0.08 = 100 & \end{array}$$

und die Lösung ist $x > 100$, d.h. wenn der monatliche Stromverbrauch größer als 100 kWh ist, sind die monatlichen Kosten beim zweiten Stromtarif größer als beim ersten Stromtarif, und in diesem Fall ist der erste Stromtarif günstiger.

11. Mengen und ihre Elemente und Teilmengen

(a) Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von Elementen, z.B. die Menge M sei definiert durch

$$M = \{2, 8, 6, 4\} = \{8, 2, 6, 4\} = \{2, 2, 6, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4\}$$

Man merkt, die Menge bleibt gleich bei einer Änderung der Reihenfolge oder bei einer Wiederholung der Elemente in der Liste. Die Mächtigkeit der Menge M, bezeichnet mit $\#M$ oder $|M|$, ist die Anzahl der Elemente der Menge. Für $M = \{2, 4, 6, 8\}$ gilt also $\#M = 4$ oder $|M| = 4$.

(b) Für ein Element a wird mit

$$a \in M \quad \text{bzw.} \quad a \notin M$$

symbolisiert, dass a ein Element von M ist, bzw. kein Element von M ist, z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$

$$\text{für} \quad a = 2 \quad \text{gilt} \quad a \in M \quad \text{aber für} \quad a = 0 \quad \text{gilt} \quad a \notin M$$

(c) Für eine Menge A wird mit

$$A \subset M \quad \text{bzw.} \quad A \not\subset M$$

symbolisiert, dass jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge M ist, bzw. nicht jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge M ist, z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$

$$\text{für } A = \{2, 4\} \quad \text{gilt} \quad A \subset M \quad \text{aber für} \quad A = \{0, 2\} \quad \text{gilt} \quad A \not\subset M$$

Wenn $A \subset M$ gilt, ist A eine Teilmenge von M, und sonst für $A \not\subset M$ ist A keine Teilmenge von M.

12. Mengen durch Bedingungen

(a) Jedes Element a der Menge $A = \{2, 4\}$ erfüllt die Bedingung $a < 5$, und mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$ lässt sich A so schreiben:

$$A = \{a \in M : a < 5\}$$

Man liest diese Gleichung so: "A ist die Menge der Elemente a aus M ($a \in M$), wobei (:) die Eigenschaft $a < 5$ erfüllt ist." Mit dieser Schreibweise ist es dann klar, dass $A \subset M$ gilt. Weiters ist die Teilmenge

$$B = \{b \in M : (b - 4)^2 = 2\}$$

explizit gegeben durch die Menge $\{2, 6\}$.

(b) Wenn mehr als eine Bedingung verwendet werden, um eine Teilmenge zu definieren, werden diese Bedingungen in der Definition aufgelistet, z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$

$$\{m \in M : m < 7, m > 3\} = \{m \in M : m < 7 \text{ und } m > 3\} = \{4, 6\}$$

wobei die Bedingungen mit einem Beistrich oder mit dem Wort *und* getrennt werden. Wenn per Definition *entweder* eine Bedingung *oder* eine andere Bedingung erfüllt werden sollen, werden diese Bedingungen mit dem Wort *oder* getrennt,

$$\{m \in M : m < 3 \text{ oder } m > 7\} = \{2, 8\}$$

(c) Der Durchschnitt von A und B wird geschrieben mit

$$A \cap B = \{m \in M : m \in A \text{ und } m \in B\}$$

z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{2, 4\}$ und $B = \{2, 6\}$ gilt $A \cap B = \{2\}$.

(d) Die Vereinigung von A und B wird geschrieben mit

$$A \cup B = \{m \in M : m \in A \text{ oder } m \in B\}$$

z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{2, 4\}$ und $B = \{2, 6\}$ gilt $A \cup B = \{2, 4, 6\}$.

(e) Die Differenz A ohne B wird geschrieben mit

$$A \backslash B = \{m \in M : m \in A \text{ und } m \notin B\}$$

z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{2, 4\}$ und $B = \{2, 6\}$ gilt $A \backslash B = \{4\}$.

(f) Das Komplement von A in M wird geschrieben mit

$$\mathcal{C}_M A = \{m \in M : m \notin A\}$$

z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$ und $A = \{2, 4\}$ gilt $\mathcal{C}_M A = \{6, 8\}$.

(g) Wenn die Bedingung in der Definition einer Menge von keinem Element erfüllt ist, ergibt sich eine Menge mit keinen Elementen, z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$ ist

$$\{m \in M : m < 0\} = \{\} = \emptyset$$

wobei die beiden Symbole, $\{\}$ und $\emptyset$, für die sogenannte leere Menge verwendet werden.

13. Zahlenmengen

(a) Die natürlichen Zahlen sind

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

(b) Mit $\{0\}$ angefügt, ergibt sich die Menge

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(c) Die ganzen Zahlen sind

$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}_0 = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

wobei mit $-\mathbb{N}$ gemeint ist

$$-\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

(d) Die rationalen Zahlen sind

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

z.B. $0.625 \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ und $-\frac{1}{17} \in \mathbb{Q}$. Die Dezimaldarstellung jeder rationalen Zahl verlangt entweder endlich viele Ziffern, oder es gibt eine fixierte Anzahl von Ziffern in der Darstellung, die sich unendlich oft wiederholen, z.B.

$$0.625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}, \quad \frac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\overline{3}$$

$$-\frac{1}{17} = -0.05882352941176470588\cdots = -0.0\overline{588235294117647 0}$$

wobei die überstrichenen Ziffern wiederholt werden.

(e) Das Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen.

- Um die reellen Zahlen grob zu verstehen, schaut man von einem fixierten Standpunkt alle möglichen Abstände auf dem Weg vor sich und auch hinter sich an.
- Jeder Abstand vor sich entspricht einer reellen Zahl $x > 0$.
- Jeder Abstand hinter sich entspricht einer reellen Zahl $x < 0$.
- Der fixierte Standpunkt entspricht der reellen Zahl $x = 0$.
- Diese Abstände bilden ein Kontinuum, d.h. es gibt keine Lücken auf dem Weg, die nicht zugänglich sind.

(f) Die irrationalen Zahlen sind die reellen Zahlen, die nicht rational sind,

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

Die Dezimaldarstellung jeder irrationalen Zahl verlangt unendlich viele Ziffern, wobei jede fixierte Anzahl von hinter einander stehenden Ziffern sich nie wiederholen. Beispiele sind

- das Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises,

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51\cdots$$

- die Eulersche Zahl $\quad (e = 1 + 1/(2 \cdot 1) + 1/(3 \cdot 2 \cdot 1) + 1/(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + \cdots)$

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709370 00\cdots$$

- der goldene Schnitt, $\quad (\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = a/b = (a + b)/a$ für $a > b > 0)$

$$\phi = 1.61803398874989484820458683436563811772030917980 58\cdots$$

- einige Wurzeln, z.B.

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537 69\cdots$$

- einige reguläre Muster, z.B. $\quad (\theta = 1/10 + 1/10^{2^2} + 1/10^{3^2} + 1/10^{4^2} + \cdots)$

$$\theta = 0.10010000100000010000000010000000000100000000000010\cdots$$

(g) Die komplexen Zahlen sind

$$\mathbb{C} = \{z = x + \imath y : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{wobei} \quad \imath^2 = -1$$

Während die Lösungen der Gleichung $x^2 = 1$ gegeben sind durch $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$, sind die Lösungen der Gleichung $z^2 = -1$ gegeben durch $z_1 = -\imath$ und $z_2 = +\imath$, d.h.

$$z_1^2 = (-\imath)^2 = (-1)^2 \imath^2 = (+1)(-1) = -1 \quad \text{und} \quad z_2^2 = (+\imath)^2 = \imath^2 = -1$$

Die komplexe Zahl $z = 1 + \imath$ erfüllt

$$z^2 = (1+\imath)^2 = 1 + 2\imath + \imath^2 = 1 + 2\imath - 1 = 2\imath = 2(z-1) \quad \text{da} \quad \imath = z - 1$$

und daher ist z eine Lösung der Gleichung $z^2 = 2(z-1)$ oder $z^2 - 2z + 2 = 0$.

14. Ungleichungen und Intervalle

(a) Für Ungleichungen gibt es die folgenden Notationen

$$\begin{array}{rll} x \neq y & \text{steht für} & x \text{ ist ungleich } y \\ y > x \text{ oder } x < y & \text{steht für} & x \text{ ist kleiner als } y \\ y \geq x \text{ oder } x \leq y & \text{steht für} & x = y \text{ oder } x \text{ ist kleiner als } y \\ y < x \text{ oder } x > y & \text{steht für} & x \text{ ist größer als } y \\ y \leq x \text{ oder } x \geq y & \text{steht für} & x = y \text{ oder } x \text{ ist größer als } y \end{array}$$

Man sagt, die Ungleichungen $x < y$ und $x > y$ sind streng, aber die Ungleichungen $x \leq y$ und $x \geq y$ sind nicht streng.

(b) Das oft verwendete Symbol

$$\forall \quad \text{bedeutet “für alle”}$$

Wenn $x \leq y$ gilt, gelten auch

$$\begin{array}{rlcc} x + z \leq y + z, & \forall z \in \mathbb{R} & & x + 7 \leq y + 7 \\ cx \leq cy, & \forall c > 0 & \text{z.B.} & 7x \leq 7y \\ cx \geq cy, & \forall c < 0 & & -7x \geq -7y \end{array}$$

(c) Für Intervalle gibt es die folgenden Notationen

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ (a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ (a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ [a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \end{array}$$

z.B. $[1,2]$ ist das abgeschlossene Intervall aller reellen Zahlen zwischen 1 und 2 inklusive 1 und 2, und $(1,2)$ ist das offene Intervall aller reellen Zahlen zwischen 1 und 2 exklusive 1 und 2.

15. Cartesische Produkte und Höhere Dimensionen

(a) Für die folgende Definition sei (a,b) ein geordnetes Paar, d.h. im jetzigen Kontext ist dies kein Intervall und die Einträge a und b erscheinen in einer bestimmten Reihenfolge. Das Cartesische Produkt der Menge A mit B ist

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

z.B. mit $A = \{2,4\}$ und $B = \{1,3,5\}$ ist

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(2,1),(2,3),(2,5), \\ &(4,1),(4,3),(4,5)\} \end{aligned}$$

Da die Reihenfolge der Einträge des geordneten Paares wichtig ist, gilt im allgemeinen $A \times B \neq B \times A$.

(b) Das Cartesische Produkt von drei Mengen ist gegeben durch

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

wobei (a, b, c) ein geordnetes 3-Tupel sei, d.h. die Einträge a, b und c erscheinen in einer bestimmten Reihenfolge. Cartesische Produkte von n Mengen werden ähnlich mit n-Tupeln definiert.

(c) Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ sei durch das zweifache Cartesische Produkt definiert

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Der reelle Raum $\mathbb{R}^3$ sei durch das dreifache Cartesische Produkt definiert

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

16. Potenzrechnungen mit Reellen Zahlen

(a) $10^{-1} = 0.1$,
$10^0 = 1.0$ und
$10^3 = 1000.0$.

(b) $3.14 \times 10^{-1} = 0.314$,
$3.14 \times 10^0 = 3.14$ und
$3.14 \times 10^3 = 3140.0$.

(c) `3.14e-01` $= 3.14 \times 10^{-1} = 0.314$,
`2.718e+00` $= 2.718 \times 10^0 = 2.718$ und
`1.618e+03` $= 1.618 \times 10^3 = 1618.0$.

(d) Um $\sqrt{2}$ händisch zu bestimmen, berechnet man

$$\begin{array}{rcll} 1.4^2 & = & 1.96 & \text{näher zu 2 als } 1.3^2 \text{ oder } 1.5^2 \\ 1.41^2 & = & 1.9881 & \text{näher zu 2 als } 1.40^2 \text{ oder } 1.42^2 \\ 1.414^2 & = & 1.9994 & \text{näher zu 2 als } 1.413^2 \text{ oder } 1.415^2 \\ 1.4142^2 & = & 1.99996 & \text{näher zu 2 als } 1.4141^2 \text{ oder } 1.4143^2 \\ & \vdots & & \end{array}$$

und die rationalen Zahlen $\{1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl $\sqrt{2}$.

Aus der Regel $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ folgt $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

(e) Um $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ händisch zu bestimmen, berechnet man

$$\begin{array}{rcll} 1.5^3 & = & 3.375 & \text{näher zu 4 als } 1.4^3 \text{ oder } 1.6^3 \\ 1.59^3 & = & 4.01968 & \text{näher zu 4 als } 1.58^3 \text{ oder } 1.60^3 \\ 1.587^3 & = & 3.99697 & \text{näher zu 4 als } 1.586^3 \text{ oder } 1.588^3 \\ 1.5874^3 & = & 3.99999 & \text{näher zu 4 als } 1.5873^3 \text{ oder } 1.5875^3 \\ & \vdots & & \end{array}$$

und die rationalen Zahlen $\{1.5, 1.58, 1.587, 1.5874, \dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl $4^{\frac{1}{3}}$.

Aus der Regel

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{mit} \quad \mathrm{ggT}(m, n) = 1$$

folgt $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}$, die durch ähnliche Rechnungen

$$\begin{array}{rcl} 2.5^3 & = & 15.625 \\ 2.52^3 & = & 16.003008 \\ 2.5198^3 & = & 15.999198 \\ 2.51984^3 & = & 15.99996 \\ & \vdots & \end{array}$$

mit den rationalen Zahlen $\{2.5, 2.520, 2.5198, 2.51984, \cdots\}$ angenähert wird.

(f) Um π^2 händisch zu bestimmen, verwendet man die Dezimaldarstellung $\pi = 3.14159\cdots$ und berechnet

$$\begin{array}{rcl} 3.1^2 & = & 9.61 \\ 3.14^2 & = & 9.8596 \\ 3.141^2 & = & 9.86588 \\ 3.1415^2 & = & 9.86902 \\ & \vdots & \end{array}$$

d.h. die rationalen Zahlen $\{9.61, 9.8596, 9.86588, 9.86902, \dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl π^2.

(g) Um 3^e händisch zu bestimmen, verwendet man die Dezimaldarstellung $e = 2.71828\cdots$ und berechnet

$$\begin{array}{rcrcr} 3^{2.7} & = & 19.4190235\cdots & \approx & 19.4190 \\ 3^{2.71} & = & 19.6335394\cdots & \approx & 19.6335 \\ 3^{2.718} & = & 19.8068571\cdots & \approx & 19.8069 \\ 3^{2.7182} & = & 19.8112096\cdots & \approx & 19.8112 \\ & \vdots & & & \end{array}$$

d.h. die rationalen Zahlen $\{19.4190, 19.6335, 19.8069, 19.8112, \dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl 3^e.

Alle Zahlen in der linken Spalte sind irrationale Wurzeln, z.B. $3^{2.7} = 3^{\frac{27}{10}} = \sqrt[10]{3^{27}}$. Diese besitzen eine unendliche Dezimaldarstellung in der mittleren Spalte. Die Zahlen in der rechten Spalte ergeben sich nach einigen Schritten der obigen Methode zur Bestimmung einer Wurzel.

(h) Um e^π händisch zu bestimmen, werden die Dezimaldarstellungen $\pi = 3.1415926\cdots$ und $e = 2.7182818\cdots$ verwendet, und man berechnet

$$\begin{array}{rcrcr} 2.7^{3.1} & = & 21.7384046\cdots & \approx & 21.7384 \\ 2.71^{3.14} & = & 22.8835591\cdots & \approx & 22.8836 \\ 2.718^{3.141} & = & 23.1194516\cdots & \approx & 23.1195 \\ 2.7182^{3.1415} & = & 23.1363605\cdots & \approx & 23.1364 \\ 2.71828^{3.14159} & = & 23.1405823\cdots & \approx & 23.1406 \\ 2.718281^{3.141592} & = & 23.1406553\cdots & \approx & 23.1407 \\ & \vdots & & & \end{array}$$

d.h. die rationalen Zahlen $\{21.7384, 22.8836, 23.1195, 23.1364, 23.1406, 23.1407\dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl e^π.

Die Spalten dieses Beispiels sind analog zu den Spalten des letzten Beispiels.

17. Algebraische Lösung von einem Gleichungssystem

(a) Um Lösungen x_0 und y_0 für das (lineare) Gleichungssystem zu finden,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & 4 \end{array} \right.$$

wird nach y in der 1. Gleichung aufgelöst, und die Beziehung zwischen x und y ergibt sich,

$$y = 1 - x$$

Diese Formel wird dann in die 2. Gleichung eingesetzt,

$$-x + 3 = 2x + 3(1 - x) = 2x + 3y = 4$$

Um x zu isolieren, summiert man $x - 4$ auf beiden Seiten und bekommt

$$-1 = (-x + 3) + (x - 4) = 4 + (x - 4) = x$$

Also gilt $x_0 = -1$. Dieser Wert $x_0 = -1$ entspricht dem Wert $y_0 = 1 - x_0 = +2$ aus der Beziehung zwischen x und y. Die Lösung ist $x_0 = -1$, $y_0 = +2$.

(b) Um Lösungen für x und y im (nicht linearen) Gleichungssystem zu finden,

$$\begin{cases} xy & = & 1 \\ x^2 + y^2 & = & 2 \end{cases}$$

wird nach y in der 1. Gleichung aufgelöst, und die Beziehung zwischen x und y ergibt sich,

$$y = \frac{1}{x}$$

Es darf durch x dividiert werden, da die 1. Gleichung mit dem Wert $x = 0$ nicht erfüllt werden kann. Daher ist Null im obigen Nenner ausgeschlossen. Diese Formel wird dann in die 2. Gleichung eingesetzt,

$$\frac{x^4 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + y^2 = 2$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, multipliziert man mit x^2 auf beiden Seiten und bekommt

$$x^4 + 1 = 2x^2 \quad \text{oder} \quad x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

Da die Potenzen in der letzten Gleichung immer gerade sind, kann die Gleichung so umgeschrieben werden,

$$(x^2 - 1)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2) + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

wobei die Binomialformel $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, $A = x^2$, $B = 1$, verwendet worden ist. Die letzte Gleichung kann nur gelten, wenn

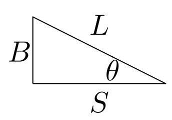
$$x^2 - 1 = 0$$

gilt. Die Nullstellen dieser quadratischen Gleichung sind $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$. Laut der obigen Beziehung zwischen x und y sind die entsprechenden y-Werte gegeben durch $y_1 = 1/x_1 = -1$ und $y_2 = 1/x_2 = +1$. Die Lösungspaare sind $x_1 = -1$, $y_1 = -1$ und $x_2 = +1$, $y_2 = +1$.

18. Rechnungen mit Winkelfunktionen

(a) Die Länge $S = 100$ des Schattens, die Länge L der Linie von der Schattenspitze bis zur Baumspitze, die Höhe B des Baums und der Winkel $\theta = 30°$ zwischen dem Boden und der Linie von der Schattenspitze bis zur Baumspitze erfüllen die folgenden Gleichungen mit Winkelfunktionen,

$$\sin(\theta) = \frac{B}{L}, \quad \cos(\theta) = \frac{S}{L}, \quad \tan(\theta) = \frac{B}{S}$$



- Die Höhe B des Baums ist

$$B = S\tan(\theta) = 100\tan(30^\circ) = 100/\sqrt{3}$$

  aber auch

$$B = L\sin(\theta) = L\sin(30^\circ) = L/2$$

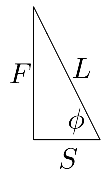
- Daher gilt $L/2 = B = 100/\sqrt{3}$ oder $L = 200/\sqrt{3}$. Sonst lässt sich L bestimmen durch

$$L = \frac{S}{\cos(30^\circ)} = \frac{100}{\sqrt{3}/2} = \frac{200}{\sqrt{3}}$$

  oder

$$L = \frac{B}{\sin(30^\circ)} = \frac{100/\sqrt{3}}{1/2} = \frac{200}{\sqrt{3}}$$

(b) Die Höhe $F = 10$ des Fahnenmasts, die Länge $S = 10/\sqrt{3}$ des Schattens, die Länge L der Linie von der Schattenspitze bis zur Fahnenmastspitze und der Winkel ϕ zwischen dem Boden und der Linie von der Schattenspitze bis zur Fahnenmastspitze erfüllen die folgenden Gleichungen mit Winkelfunktionen,



$$\sin(\phi) = \frac{F}{L}, \quad \cos(\phi) = \frac{S}{L}, \quad \tan(\phi) = \frac{F}{S}$$

Da F und S bekannt sind, lässt sich der Winkel ϕ bestimmen durch

$$\tan(\phi) = \frac{F}{S} = \frac{10}{10/\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad \text{oder} \quad \phi = \arctan(\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

Die Länge L ist dann gegeben durch

$$L = \frac{F}{\sin(\phi)} = \frac{10}{\sin(60^\circ)} = \frac{10}{\sqrt{3}/2} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

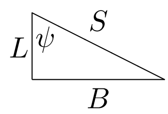
oder

$$L = \frac{S}{\cos(\phi)} = \frac{10/\sqrt{3}}{\sin(60^\circ)} = \frac{10/\sqrt{3}}{1/2} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

oder auch mit Pythagoras,

$$L = \sqrt{S^2 + F^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{100 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right)} = 10\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

(c) Die Höhe $L = 50$ der Leiter, die Länge S des Seils, der Abstand B am Boden zwischen der Leiter und dem Seil und der Winkel $\psi = 60^\circ$ erfüllen die folgenden Gleichungen mit Winkelfunktionen,



$$\sin(\psi) = \frac{B}{S}, \quad \cos(\psi) = \frac{L}{S}, \quad \tan(\psi) = \frac{B}{L}$$

Da L und ψ bekannt sind, lässt sich die Länge S des Seils bestimmen durch

$$S = \frac{L}{\cos(\psi)} = \frac{50}{\cos(60^\circ)} = \frac{50}{1/2} = 100$$

Der Abstand B am Boden zwischen der Leiter und dem Seil lässt sich dann so bestimmen,

$$B = S\sin(\psi) = 100\sin(60^\circ) = 100 \cdot \sqrt{3}/2 = 50\sqrt{3}$$

oder

$$B = L\tan(\psi) = 50\tan(60^\circ) = 50\sqrt{3}$$

19. Bestimmung von Geraden

(a) Die Steigung s der Gerade ist gegeben durch

$$s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

wobei (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Koordinaten von zwei Punkten auf der Gerade sind. Die gegebenen Punkte sind $(1, 2)$ und $(3, 4)$. und daher ist die entsprechende Steigung,

$$s = \frac{4-2}{3-1} = 1$$

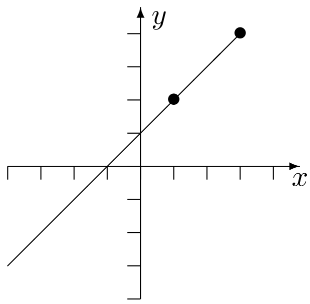
Wenn (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt auf der Gerade ist, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$(y - y_0) = s(x - x_0)$$

Man wählt zwischen den gegebenen Punkten z.B. $(1, 2)$ aus, und die Gleichung der gegebenen Gerade ist

$$(y-2) = 1 \cdot (x-1) \quad \text{oder} \quad y = x+1$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit den zwei gegebenen Punkten ist:



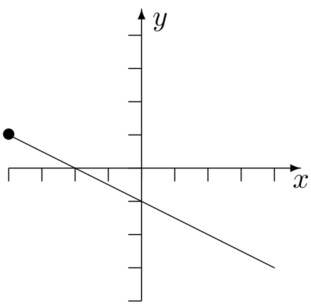
(b) Da man von einem zu einem anderen Punkt auf der Gerade durch 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach unten kommt, ist die Steigung der Gerade gegeben durch

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta x = 2, \quad \Delta y = -1, \quad \text{oder} \quad s = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Da der Punkt $(-4, 1)$ auf der Gerade liegt, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$(y-1) = -\frac{1}{2}(x+4) \quad \text{oder} \quad y = -\frac{x+2}{2}$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt ist:



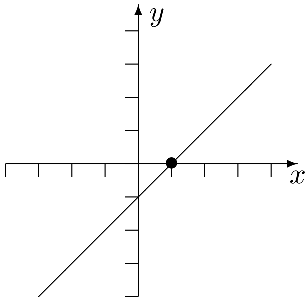
(c) Da der Winkel 45° beträgt, ist die Steigung gegeben durch

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{mit} \quad \Delta y = \Delta x, \quad \text{oder} \quad s = 1$$

Da der Punkt $(1, 0)$ auf der Gerade liegt, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$(y - 0) = 1 \cdot (x - 1) \quad \text{oder} \quad y = x - 1$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt ist:

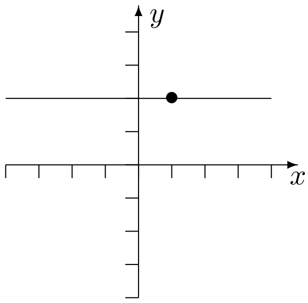


Für einen beliebigen Winkel θ ist die Steigung $s = \tan(\theta)$. Für $\theta = 30°$ gilt $s = \tan(30°) = \sqrt{3}$, und die Gerade ist gegeben durch $y = \sqrt{3}(x - 1)$. Für $\theta = 60°$ gilt $s = \tan(60°) = 1/\sqrt{3}$, und die Gerade ist gegeben durch $y = (x-1)/\sqrt{3}$. Für $\theta = 90°$ ist die Gerade senkrecht, und die Gerade ist gegeben durch $x = 1$.

(d) Da die Gerade waagerecht ist, ist die Steigung $s = 0$. Da der Punkt $(1, 2)$ auf der Gerade liegt, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$(y - 2) = 0 \cdot (x - 1) \quad \text{oder} \quad y = 2$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt ist:



(e) Da die Gerade senkrecht ist, ist die Steigung nicht endlich. Da der Punkt $(1, 2)$ auf der Gerade liegt, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$x = 1$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt ist: