Ergänzungen für die IDR Vorlesung in der Woche 24.-28. Okt 2016

Flächeninhalt durch Grenzwert: Der Flächeninhalt unter der Kurve für $f(x) = x^2$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ist gegeben durch den *Grenzwert*,

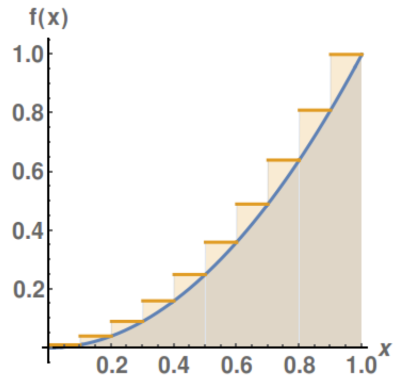
$$\int_0^1 x^2 dx \approx \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}_{x_1^2 \Delta x} + \underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}_{x_2^2 \Delta x} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}_{x_n^2 \Delta x} = S(n) \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad ?$$

Hier für $n \in \mathbb{N}$ wird das Intervall $[0, 1]$ in n Teilintervalle geteilt, und zwar mit Endpunkten

$$x_0 = 0, \; x_1 = \frac{1}{n}, \; x_1 = \frac{2}{n}, \; \ldots, \; x_i = \frac{i}{n}, \; \ldots, \; x_n = 1$$

und alle Teilintervalle mit Breite

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$$



Diese Teilung wird in der nächsten Grafik abgebildet:
Der gesuchte Flächeninhalt wird mit der Summe der Flächeninhalte der jeweiligen Vierecke angenähert. Der Flächeinhalt des ersten Vierecks ist Höhe×Breite $= x_1^2 \Delta x$, des zweiten Vierecks ist Höhe×Breite $= x_2^2 \Delta x$, usw.

Man sucht den Wert, der von der Summe $S(n)$ angenähert wird, während n unendlich groß wird. Die Funktion $S(n)$ lässt sich folgendermaßen vereinfachen:

$$S(n) = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right]$$

Mit der Notation für eine Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

lässt sich $S(n)$ so umschreiben,

$$S(n) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Mit einer Summenformel* folgt

$$S(n) = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Mit der Eigenschaft $1/n^k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \; \forall k > 0$, bestimmt man den Grenzwert für eine unendlich feine Teilung,

$$S(n) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \left(\frac{n^{-2}}{n^{-2}}\right) = \frac{2 + 3/n + 1/n^2}{6} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{3}$$

und daher ist der gesuchte Flächeninhalt 1/3.

*Die Summenformeln auf Seite 70 im Skriptum werden ohne Herleitung zur Verfügung gestellt, aber wenn Sie eine Erklärung gerne hätten, melden Sie sich.
Wenn Sie solche Formeln lustigerweise bei einer Party anwenden möchten, sehen Sie die Hausaufgabe über Sektgläser auf Seite 75 im Skriptum. Die Antwort ist $14 + 13 + 12 + \cdots + 2 + 1 = 14 \cdot 15/2 = 105$.

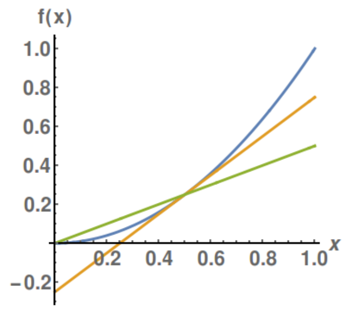
Steigung durch Grenzwert: Die Steigung der Kurve für $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1/2$ ist gegeben durch den *Grenzwert*

$$f'(\tfrac{1}{2}) \approx \frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}+h) - \frac{1}{2}} = \frac{(\frac{1}{2}+h)^2 - (\frac{1}{2})^2}{h} = Q(h) \quad \xrightarrow{h\to 0} \quad ?$$

Diese Steigung ist jene einer Tangentengerade durch den Punkt $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$. Die Steigung dieser Tangentengerade wird mit jener einer Sekantengerade durch die Punkte

$$(\tfrac{1}{2}, f(\tfrac{1}{2})) \quad \text{und} \quad (\tfrac{1}{2}+h, f(\tfrac{1}{2}+h)) \quad (h \neq 0)$$

angenähert. In der nächsten Grafik erscheint die Kurve blau, die Tangentengerade gelb und eine mögliche Sekantengerade grün. Hier mit $h < 0$ ist die Sekantengerade seicht, aber für $h > 0$ ist die Sekantengerade steil. Die Steigung der Sekantengerade ist gegeben durch



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}+h) - \frac{1}{2}}$$

Man sucht den Wert, der von dem Quotienten $Q(h)$ angenähert wird, während h sich an 0 annähert. Die Funktion $Q(h)$ lässt sich folgendermaßen vereinfachen:

$$Q(h) = \frac{(\frac{1}{2}+h)^2 - (\frac{1}{2})^2}{h} = \frac{\frac{1}{4} + h + h^2 - \frac{1}{4}}{h} = \frac{h+h^2}{h} = 1 + h \quad \xrightarrow{h\to 0} \quad 1$$

Grenzwerte: Für die obigen Fälle schreibt man für die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} Q(h) = 1$$

Die erste Gleichung bedeutet, der Wert $1/3$ wird von $S(n)$ angenähert, während n immer größer wird, oder während n sich an $+\infty$ beliebig annähert. Die zweite Gleichung bedeutet, der Wert 1 wird von $Q(h)$ angenähert, während h sich an 0 beliebig annähert.

Man merkt, die Werte $S(\infty)$ und $Q(0)$ sind nicht definiert, d.h. sie existieren nicht. Trotzdem existieren die obigen Grenzwerte. Ein Grenzwert hat nichts damit zu tun, was die Funktion an der Stelle tut, sondern nur wie die Funktion sich unterwegs zu der Stelle verhält.

Stetigkeit: Man könnte die Definition von $Q(h)$ folgendermaßen ergänzen,

$$\text{alt:} \quad Q(h) = \frac{(\frac{1}{2}+h)^2 - (\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2}+h) - (\frac{1}{2})} \overset{h\neq 0}{=} 1 + h \quad \text{und neu:} \quad Q(h) = \begin{cases} 1+h, & h \neq 0 \\ 1, & h = 0 \end{cases}$$

und dann erfüllt die neue Funktion

$$\lim_{h\to 0} Q(h) = Q(0) \quad (= 1)$$

Diese ist die Eigenschaft der Stetigkeit an der Stelle $h = 0$, d.h. die neue Funktion ist eine *stetige Ergänzung* der alten Funktion.

Zur Betonung: Eine Funktion $y(x)$ ist stetig an der Stelle x_0 wenn gilt

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = y(x_0)$$

d.h. der Grenzwert existiert an der Stelle x_0, der Funktionswert $y(x_0)$ ist wohl definiert an der Stelle und der Grenzwert und der Funktionswert stimmen überein.

Einseitige Grenzwerte: Wenn ein Grenzwert existiert

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = L$$

muss die Funktion $y(x)$ sich an den Wert L annähern, während x sich an x_0 *beliebig* annähert. Z.B. x mag sich an x_0 von links ($x < x_0$) oder von rechts ($x > x_0$) annähern, und man schreibt

$$\lim_{x \to x_0^-} y(x) = L \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x_0^+} y(x) = L$$

D.h. wenn der Grenzwert existiert, dann stimmt er mit den einseitigen Grenzwerten überein.

Die einseitigen Grenzwerte können existieren, ohne dass sie übereinstimmen. Z.B. man untersucht die Stelle $x_0 = 0$ für die sign-Funktion (sehen Sie die Grafik unten),

$$y_1(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

Hier mag x sich an 0 beliebig von links ($x < 0$) annährend, und es gilt immer $y_1(x) = -1$, d.h.

$$\lim_{x \to 0^-} y_1(x) = -1$$

Ähnlich mag x sich an 0 beliebig von rechts ($x > 0$) annährend, und es gilt immer $y_1(x) = +1$, d.h.

$$\lim_{x \to 0^+} y_1(x) = +1$$

Die einseitigen Grenzwerte existieren, aber sie stimmen nicht überein. Daher existiert der allgemeine Grenzwert nicht. Daher ist y_1 nicht stetig.

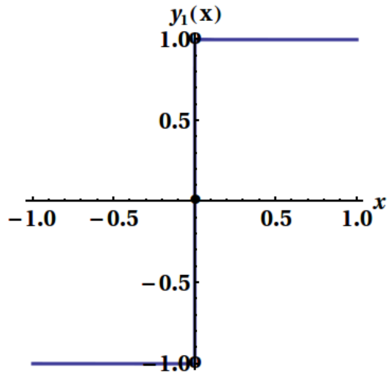
Beispiel einer nicht stetigen Funktion: Folgendermaßen zeigt man direkt dass $y_1(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig ist. Wenn die Funktion in $x_0 = 0$ stetig wäre, müsste $y_1(x)$ sich an den Wert $y_1(x_0) = 0$ annähern, wenn x in einer *beliebigen* Weise sich an $x_0 = 0$ annähern würde. Wenn man nur *eine* Verletzung dieser Eigenschaft entdeckt, dann ist die Funktion nicht stetig. Man sieht solche Verletzungen folgendermaßen, zuerst von rechts und dann von links.

Für die x-Werte

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}, \quad x_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \ldots \qquad x_k = \tfrac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

$$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \text{sign}(1) = 1 \\ y_1(x_2) &= \text{sign}(\tfrac{1}{2}) = 1 \\ y_1(x_3) &= \text{sign}(\tfrac{1}{3}) = 1 \\ &\vdots \\ y_1(x_k) &= \text{sign}(\tfrac{1}{k}) = 1 \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 = y_1(0) \end{aligned}$$



und die entsprechenden y_1-Werte nähern sich nicht an $y_1(x_0) = 0$!

Auch für die x-Werte

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_3 = -\tfrac{1}{3}, \quad \cdots, \qquad x_k = -\tfrac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

die sich an $x_0 = 0$ von links annähern, gelten

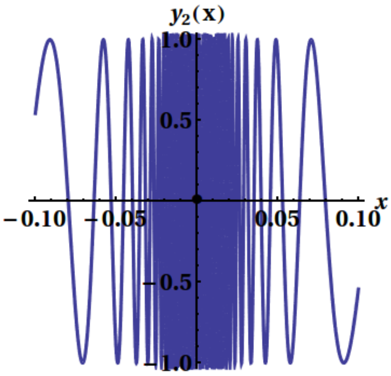
$$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \text{sign}(-1) = -1 \\ y_1(x_2) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{2}) = -1 \\ y_1(x_3) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{3}) = -1 \\ &\vdots \\ y_1(x_k) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{k}) = -1 \\ &\xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = y_1(0) \end{aligned}$$

und die entsprechenden y_1-Werte nähern sich nicht an $y_1(x_0) = 0$!

Beispiel einer nicht stetigen Funktion: Analog zeigt man, $y_2(x) = \sin(1/x)$, $y_2(0) = 0$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig. Wenn die Funktion in $x_0 = 0$ stetig wäre, müsste $y_2(x)$ sich an den Wert $y_2(x_0) = 0$ annähern, wenn x in einer *beliebigen* Weise sich an $x_0 = 0$ annähern würde. Wenn man nur *eine* Verletzung dieser Eigenschaft entdeckt, dann ist die Funktion nicht stetig. Man sieht solche Verletzungen folgendermaßen, zuerst von rechts und dann von links.

Für die x-Werte

$$x_1 = \tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}, \quad x_2 = \tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}, \quad x_3 = \tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}, \quad \ldots \qquad x_k = \tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$



die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

$$\begin{aligned} y_2(x_1) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi) = 1 \\ y_2(x_2) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 4\pi) = 1 \\ y_2(x_3) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 6\pi) = 1 \\ &\vdots \\ y_2(x_k) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 1 \neq 0 = y_2(0) \end{aligned}$$

und die entsprechenden y_2-Werte nähern sich nicht an $y_2(x_0) = 0$!

Auch für die x-Werte

$$x_1 = -\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}, \quad x_2 = -\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}, \quad x_3 = -\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}, \cdots, \qquad x_k = -\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

die sich an $x_0 = 0$ von links annähern, gelten

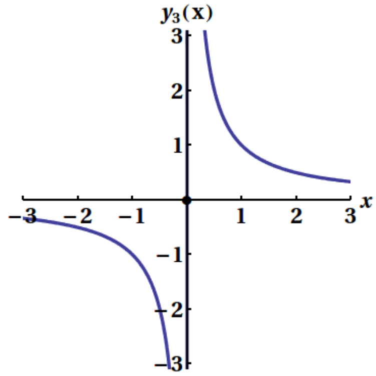
$$\begin{aligned} y_2(x_1) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2} - 2\pi) = -1 \\ y_2(x_2) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2} - 4\pi) = -1 \\ y_2(x_3) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2} - 6\pi) = -1 \\ &\vdots \\ y_2(x_k) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2} - 2k\pi) = -1 \\ &\xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = y_2(0) \end{aligned}$$

und die entsprechenden y_2-Werte nähern sich nicht an $y_2(x_0) = 0$!

Beispiel einer nicht stetigen Funktion: Analog zeigt man, $y_3(x) = 1/x$, $y_3(0) = 0$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig. Wenn die Funktion in $x_0 = 0$ stetig wäre, müsste $y_3(x)$ sich an den Wert $y_3(x_0) = 0$ annähern, wenn x in einer *beliebigen* Weise sich an $x_0 = 0$ annähern würde. Wenn man nur *eine* Verletzung dieser Eigenschaft entdeckt, dann ist die Funktion nicht stetig. Man sieht solche Verletzungen folgendermaßen, zuerst von rechts und dann von links.

Für die x-Werte

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}, \quad x_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \ldots \qquad x_k = \tfrac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$



die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

$$\begin{aligned} y_3(x_1) &= 1/1 = 1 \\ y_3(x_2) &= 1/\tfrac{1}{2} = 2 \\ y_3(x_3) &= 1/\tfrac{1}{3} = 3 \\ &\vdots \\ y_3(x_k) &= 1/\tfrac{1}{k} = k \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0 = y_3(0) \end{aligned}$$

und die entsprechenden y_3-Werte nähern sich nicht an $y_3(x_0) = 0$!

Auch für die x-Werte

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_3 = -\tfrac{1}{3}, \ldots \qquad x_k = \tfrac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

$$\begin{aligned} y_3(x_1) &= -1/1 = -1 \\ y_3(x_2) &= -1/\tfrac{1}{2} = -2 \\ y_3(x_3) &= -1/\tfrac{1}{3} = -3 \\ &\vdots \\ y_3(x_k) &= -1/\tfrac{1}{k} = -k \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \neq 0 = y_3(0) \end{aligned}$$

und die entsprechenden y_3-Werte nähern sich nicht an $y_3(x_0) = 0$!

Uneigentliche Grenzwerte: Die einseitigen Grenzwerte von $y_3(x)$ sind an der Stelle $x_0 = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} y_3(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} y_3(x) = +\infty$$

und diese nennt man *uneigentlich*, weil der Grenzwert nicht endlich ist.

Analog ist der uneigentliche Grenzwert für die positive Funktion $f(x) = 1/x^2$ gegeben durch

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

der mit den uneigentlichen einseitigen Grenzwerten übereinstimmt,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Weiters gelten für die negative Funktion $g(x) = -1/(x-1)^2$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty = \lim_{x\to 1^+} g(x)$$

Grenzwerte einer Rationalen Funktion: Für die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots p_1 x + p_0 \\ q(x) = q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots q_1 x + q_0 \end{array}$$

wird das Verhalten für $|x|$ groß durch

$$\frac{p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots p_1 x + p_0}{q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots q_1 x + q_0}\left(\frac{x^{-m}}{x^{-m}}\right) = x^{n-m}\left[\frac{p_n + p_{n-1}x^{-1} + \cdots p_1 x^{1-n-m} + p_0 x^{-n-m}}{q_m + q_{m-1}x^{-1} + \cdots q_1 x^{1-m} + q_0 x^{-m}}\right]$$

$$= \left(\frac{p_n}{q_m}x^{n-m}\right)\underbrace{\left[\frac{q_m}{p_n} \times \frac{p_n + p_{n-1}x^{-1} + \cdots p_1 x^{1-n-m} + p_0 x^{-n-m}}{q_m + q_{m-1}x^{-1} + \cdots q_1 x^{1-m} + q_0 x^{-m}}\right]}_{\to 1, \quad |x|\to\infty}$$

oder durch ρx^{n-m} mit $\rho = p_n/q_m$ bestimmt. Die Regel ist,

Man wählt die Potenz m in x^{-m} aus, um den Nenner *brav* zu machen,
d.h. eine Konstante plus Terme die mit $|x| \to \infty$ verschwinden.

Alle Möglichkeiten lassen sich von dem dominanten Term ρx^{n-m} auflisten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x) \overset{n=m}{=} \rho \qquad \lim_{x\to\pm\infty} r(x) \overset{n\leq m}{=} 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) \overset{n\geq m}{=} \begin{cases} +\infty, & \rho > 0 \\ -\infty, & \rho < 0 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) \overset{n\geq m}{=} \begin{cases} +\infty, & \rho > 0, \quad n-m \in 2\mathbb{N} \quad \text{oder} \\ & \rho < 0, \quad n-m \in 2\mathbb{N}-1 \\ -\infty, & \rho > 0, \quad n-m \in 2\mathbb{N}-1 \quad \text{oder} \\ & \rho < 0, \quad n-m \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

Beispiel: Für $r(x) = 3x/(1+x^2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} r(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{1+x^2}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^{-1}}_{\to 0} \frac{3}{\underbrace{1+x^{-2}}_{\to 3}} = 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Für $r(x) = x^3/(1+x^2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} r(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1+x^2}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{x^{-2}+1}_{\to 1}} = +\infty \end{aligned}$$

Beispiel: Für $r(x) = x^3/(1-x^2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} r(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2}\left(\frac{-x^{-2}}{-x^{-2}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{-x}_{\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{1-x^{-2}}_{\to 1}} = -\infty \end{aligned}$$