Integral- und Differentialrechnungen für USW
Übungsblatt 14, Ausarbeitung ab dem 30.Jänner 2017

1. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Interpolation

   Seien t die Zeit in Minuten und r die Konzentration in Mol/Liter einer Substanz im Lauf einer chemischen Reaktion. Gegeben seien die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^3$

   $$(1.0, 1.0), \quad (2.0, 1.5) \quad \text{und} \quad (3.0, 1.8)$$

   und eine rationale Funktion $r(t) = p(t)/q(t)$ mit $p(t) = a_1 t + a_2$ und $q(t) = t + a_3$ soll bestimmt werden, die die Bedingungen erfüllt

   $$r(t_i) = r_i \quad \text{oder} \quad p(t_i) = r_i q(t_i) \quad \text{oder} \quad t_i a_1 + a_2 - r_i a_3 = r_i t_i, \quad i = 1, 2, 3$$

   Diese Methode heißt rationale Interpolation. (Hinweis: Diese Daten entsprechen der rationalen Funktion $r = 3t/(t + 2)$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

   (a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor

   $$M = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & -r_1 \\ t_2 & 1 & -r_2 \\ t_3 & 1 & -r_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1 t_1 \\ r_2 t_2 \\ r_3 t_3 \end{bmatrix}$$

   (b) Die Parameter der rationalen Funktion

   $$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

   werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

   $$a_1 = 3.0, \quad a_2 = 0.0 \quad \text{und} \quad a_3 = 2.0.$$

   Bonus: Lösen Sie das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

   ```
   M = {{1, 1, -1.0}, {2, 1, -1.5}, {3, 1, -1.8}}
   b = {1.0, 3.0, 5.4}
   a = Inverse[M].b
   ```

   (c) Bestätigen Sie mit den berechneten Koeffizienten $\{a_1, a_2, a_3\}$, dass die Interpolationsbedingungen $r(t_i) = r_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt sind.

2. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Regression

   Seien t und u wie im letzten Beispiel, aber nun seien die zusätzlichen Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^5$ gegeben,

   $$(0.2, 0.3), \quad (0.4, 0.5), \quad (0.8, 0.9), \quad (1.6, 1.3) \quad \text{und} \quad (3.2, 1.8)$$

und eine rationale Funktion $r(t) = p(t)/q(t)$ mit $p(t) = a_1 t + a_2$ und $q(t) = t + a_3$ soll bestimmt werden, die die Summe der Quadrate minimiert

$$E(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{5} [t_i a_1 + a_2 - r_i a_3 - r_i t_i]^2$$

Diese Methode heißt rationale Regression. (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der rationalen Funktion $r = 3t/(t+2)$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & -r_1 \\ t_2 & 1 & -r_2 \\ t_3 & 1 & -r_3 \\ t_4 & 1 & -r_4 \\ t_5 & 1 & -r_5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1 t_1 \\ r_2 t_2 \\ r_3 t_3 \\ r_4 t_4 \\ r_5 t_5 \end{bmatrix} \quad \text{und die Produkte} \quad A^\top A, \quad A^\top \boldsymbol{b}$$

(b) Die Parameter der rationalen Funktion

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $A^\top A \boldsymbol{a} = A^\top \boldsymbol{b}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_0 = 2.82056, \quad a_1 = 0.0394805 \quad \text{und} \quad a_2 = 1.84684.$$

Bonus: Lösen Sie das System $A^\top A \boldsymbol{a} = A^\top \boldsymbol{b}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

```
A = {{0.2,1,-0.3},{0.4,1,-0.5},{0.8,1,-0.9},{1.6,1,-1.3},{3.2,1,-1.8}}
b = {0.06,0.2,0.72,2.08,5.76}
a = Inverse[Transpose[A].A].(Transpose[A].b)
```

(c) Mit den durch rationale Regression berechneten Koeffizienten $\{a_1, a_2, a_3\}$ vergleichen Sie die Werte r_i und $r(t_i)$, $i = 1, \ldots, 5$.

3. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Interpolation

Seien t die Zeit in Wochen und T die durchschnittliche Temperatur des Ozeans rund um Grönland in °C, nachdem der Golfstrom zum Halt kommt. Gegeben seien die Daten $\{(t_i, T_i)\}_{i=1}^{3}$

$$(0.0, 10.0), \quad (1.0, 5.50) \quad \text{und} \quad (2.0, 3.25)$$

und eine exponentielle Funktion $T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t}$ soll bestimmt werden, die die Bedingungen erfüllt

$$T(t_i) = T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Diese Methode heißt exponentielle Interpolation. (Hinweis: Diese Daten entsprechen der exponentiellen Funktion $T = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Anhand der ersten Bedingung $10 = T(0) = \alpha + \beta e^{0\nu}$ oder $\beta = 10 - \alpha$ schreiben Sie die anderen Bedingungen

$$5.50 = T(1) = \alpha + \beta e^{\nu} \quad \text{und} \quad 3.25 = T(2) = \alpha + \beta e^{2\nu}$$

rein bezüglich α und ν um, d.h. ohne β.

(b) Lösen Sie nach α in den beiden Gleichungen auf, und zeigen Sie mit $x = e^{\nu}$, es gilt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x-1)} = \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)}$$

(c) Lösen Sie nach x in dieser Gleichung auf, und setzen Sie $\nu = \ln(x)$. Dann ist α durch die letzte Gleichung gegeben, und β ist durch $\beta = 10 - \alpha$ gegeben.

(d) Bestätigen Sie mit den berechneten Parametern $\{\alpha, \beta, \nu\}$, dass die Interpolationsbedingungen $T(t_i) = T_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt sind.

4. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Regression

Um die Nachfrage einer Ware darzustellen, seien s der Einheitspreis der Ware in € und v das entsprechende Vielfach von 10^3 Waren, das von Konsumenten gekauft wird. Gegeben seien die Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^5$

$$(0.0, 10.0), \quad (0.5, 7.1), \quad (1.0, 5.0), \quad (1.5, 3.6) \quad \text{und} \quad (2.0, 2.5)$$

und eine Exponentialfunktion $v(s) = ce^{ks}$ soll bestimmt werden, die die Summe der Quadrate

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^{5} [(ks_i + d) - \ln(v_i)]^2$$

minimiert. Hier ist die Form des Problems durch $\ln(v) = \ln(ce^{ks}) = ks + d$ mit $d = e^c$ transformiert worden, damit lineare Regression auf die transformierten Daten verwendet werden kann. (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der Exponentialfunktion $v = 10 \cdot 2^{-s}$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Führen Sie die logarithmische Transformation durch,

$$y_i = \ln(v_i), \quad x_i = s_i, \quad i = 1, \ldots, 5$$

um die transformierten Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ zu erzeugen.

(b) Durch die Methode der linearen Regression bestimmen Sie die Gleichung $y = k^*x + d^*$ der Gerade, die die Summe der Quadrate

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^{4} [(kx_i + d) - y_i]^2$$

minimiert. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ grafisch dar.

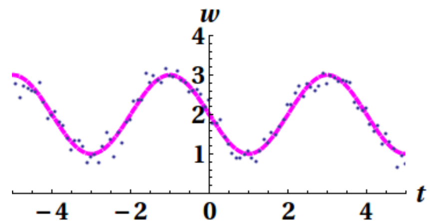
(c) Mit $y = k^*x + d^*$, $y = \ln(u)$, $x = s$ und $c^* = e^{d^*}$ führen Sie die exponentielle Transformation durch,

$$v = \exp(y) = \exp(k^*x + d^*) = e^{k^*s}e^{d^*} = c^*e^{k^*s}$$

um die Exponentialfunktion $u = c^*e^{k^*s}$ zu bestimmen. Stellen Sie diese Exponentialfunktion zusammen mit den Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^5$ grafisch dar.

5. Abschätzung von Winkelfunktionen

Seien t die Zeit in Jahren nach dem Jahr 2000 und w die globale durchschnittliche Erhöhung des Meeresspiegels in Meter bezüglich des Zustands im Jahr 1900. Gegeben seien die grafisch dargestellten Daten,



und eine Winkelfunktion

$$w(t) = c + a\sin[2\pi\omega(t-b)]$$

soll bestimmt werden, die die obigen Daten widerspiegelt. Bestimmen Sie die Parameter $\{a, b, c, \omega\}$ aus der Grafik.