Integral- und Differentialrechnungen für USW
Übungsblatt 13, Ausarbeitung ab dem 23.Jänner 2017

1. Abschätzung von Geraden

   Seien x die Erhöhung der globalen durchschnittlichen CO_2 Konzentration über 400ppm und y die jährlich durchschnittliche Temperatur in °C in Island. Gegeben seien die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$,

   $$(0, 1.6), \quad (1, 1.9), \quad (2, 2.6) \quad \text{und} \quad (3, 2.9)$$

   (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der Gerade $y = x/2+3/2$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

   (a) Stellen Sie die Datenpunkte in $\mathbb{R}^2$ grafisch dar. Wählen Sie *zwei weitere* Punkte P und Q aus, welche ungefähr auf der gleichen Gerade liegen wie die dargestellten Punkte. Bestimmen Sie die Gleichung $y = \tilde{k}x + \tilde{d}$ der Gerade durch P und Q. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten grafisch dar. Vergleichen Sie die Werte y_i und $y(x_i) = \tilde{k}x_i + \tilde{d}$, $i = 1, \dots, 4$.

   (b) Durch die Methode der linearen Regression bestimmen Sie die Gleichung $y = k^*x + d^*$ der Gerade, die die Summe der Quadrate $E(k, d) = \sum_{i=1}^4 [(kx_i + d) - y_i]^2$ minimiert. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten grafisch dar. Vergleichen Sie die Werte y_i und $y(x_i) = k^*x_i + d^*$, $i = 1, \dots, 4$.

   (c) Da $E(k, d)$ in (k^*, d^*) minimiert wird, bestätigen Sie, es gilt $E(k^*, d^*) < E(\tilde{k}, \tilde{d})$.

2. Abschätzung von Potenzfunktionen

   Sei s die tägliche Masse von einem Schadstoff in Kilogramm, der von einer Fabrik in einen Fluss freigesetzt wird. Sei u die täglich durchschnittliche Dichte des Schadstoffs im umliegenden Erdreich in Kilogramm/Meter^3. Gegeben seien die Daten $\{(s_i, u_i)\}_{i=1}^4$,

   $$(1, 0.4), \quad (4, 1.1), \quad (9, 1.4) \quad \text{und} \quad (16, 2.1)$$

   (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der Potenzfunktion $u = \sqrt{s}/2$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

   (a) Führen Sie die logarithmische Transformation durch,

   $$y_i = \ln(u_i), \quad x_i = \ln(s_i), \quad i = 1, \dots, 4$$

   um die transformierten Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ zu erzeugen.

   (b) Durch die Methode der linearen Regression bestimmen Sie die Gleichung $y = k^*x + d^*$ der Gerade, die die Summe der Quadrate $E(k, d) = \sum_{i=1}^4 [(kx_i + d) - y_i]^2$ minimiert. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ grafisch dar.

   (c) Mit $y = k^*x + d^*$, $y = \ln(u)$, $x = \ln(s)$ und $c^* = e^{d^*}$ führen Sie die exponentielle Transformation durch,

   $$u = \exp(y) = \exp(k^*x + d^*) = e^{k^* \ln(s)} e^{d^*} = e^{d^*} e^{\ln(s^{k^*})} = c^* s^{k^*}$$

   um die Potenzfunktion $u = c^* s^{k^*}$ zu bestimmen. Stellen Sie diese Potenzfunktion zusammen mit den Daten $\{(s_i, u_i)\}_{i=1}^4$ grafisch dar.

3. Abschätzung von Polynomen durch Interpolation

Sei p die jährlichen Gesundheitskosten pro Einwohner eines Landes in Vielfachen von €10^3. Sei x der Netto-Flächeninhalt der Wälder in Vielfachen von 10^6 Hektar, der jährlich vom Land gegen Energieverbrauch geschützt wird. Gegeben seien die Daten $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^3$,

$$(-1,3), \quad (0,1) \quad \text{und} \quad (1,1)$$

und ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ soll bestimmt werden, das die Bedingungen erfüllt

$$p(x_i) = p_i, \quad i = 1,2,3$$

Diese Methode heißt polynomiale Interpolation der Daten. (Hinweis: Diese Daten sind entsprechen dem Polynom $p = 1 - x + x^2$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

(b) Die Parameter des Polynoms

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_0 = 1.0, \quad a_1 = -1.0 \quad \text{und} \quad a_2 = 1.0.$$

Bonus: Lösen Sie das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

```
M = {{1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}}
p = {3.0, 1.0, 1.0}
a = Inverse[M].p
```

(c) Bestätigen Sie mit den berechneten Koeffizienten $\{a_0, a_1, a_2\}$, dass die Interpolationsbedingungen $p(x_i) = p_i$, $i = 1,2,3$, erfüllt sind.

4. Abschätzung von Polynomen durch Regression

Seien x und p wie im letzten Beispiel, aber nun seien die zusätzlichen Daten $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^5$ gegeben,

$$(-2.0, 6.9), \quad (-1.0, 3.1), \quad (0.0, 0.9), \quad (1.0, 1.1) \quad \text{und} \quad (2.0, 2.9)$$

und ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ soll bestimmt werden, das die Summe der Quadrate minimiert:

$$E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{5} [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) - p_i]^2$$

Diese Methode heißt polynomiale Regression. (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen des Polynoms $p = 1 - x + x^2$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} \quad \text{und die Produkte} \quad A^\top A, \quad A^\top \boldsymbol{p}$$

(b) Die Parameter des Polynoms

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $A^\top A\boldsymbol{a} = A^\top \boldsymbol{p}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_0 = 1.03714, \quad a_1 = -1.0 \quad \text{und} \quad a_2 = 0.971429.$$

Bonus: Lösen Sie das System $A^\top A\boldsymbol{a} = A^\top \boldsymbol{p}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

```
A = {{1, -2, 4}, {1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}, {1, 2, 4}}
p = {6.9, 3.1, 0.9, 1.1, 2.9}
a = Inverse[Transpose[A].A].(Transpose[A].p)
```

(c) Mit den durch polynomiale Regression berechneten Koeffizienten $\{a_0, a_1, a_2\}$ vergleichen Sie die Werte p_i und $p(x_i)$, $i = 1, \ldots, 5$.