Integral- und Differentialrechnungen für USW
Übungsblatt 11, Ausarbeitung ab dem 9.Jänner 2017

1. Rotationsflächen

   Die folgenden Funktionen hängen nur vom Abstand $r = \sqrt{x^2+y^2}$ zwischen einem Punkt (x, y) und dem Ursprung $(0, 0)$ ab. Daher sind die grafischen Darstellungen durch Rotationsflächen gegeben. Stellen Sie diese grafisch dar:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 1$

   (b) $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\ln(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y) \neq (0,0), \quad g(0,0) = 0$

   und anhand der jeweiligen Grafiken erklären Sie in Wörtern, ob und wo die Funktionen stetig und differenzierbar sind.

   Hinweise: Stellen Sie jede Funktion in $\mathbb{R}^2$ für fixiertes $y = 0$ grafisch dar, und drehen Sie die sich ergebende Kurve um die z-Achse in $\mathbb{R}^3$. Zur Kontrolle können Sie die folgenden Mathematica-Befehle probieren:

   ```
   Plot3D[Sin[Sqrt[x^2+y^2]]/Sqrt[x^2+y^2],{x,-10,+10},{y,-10,+10}, PlotRange->All]
   ```

   ```
   Plot3D[Sqrt[x^2+y^2]Log[Sqrt[x^2+y^2]],{x,-0.7,+0.7},{y,-0.7,+0.7},PlotRange->All]
   ```

2. Stetigkeit und Partielle Differenzierbarkeit

   Zeigen Sie, die Funktion

   $$f(x,y) = \frac{2yx^2}{x^4+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

   ist an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig aber doch *partiell* differenzierbar.

   Hinweise: Zeigen Sie, entlang einer Kurve $y = kx^2$ hängt $f(x, y)$ nur von $k \in \mathbb{R}$ ab. Daher ist der Grenzwert für $f(x, y)$ mit $(x, y) = (x, kx^2) \to (0, 0)$ nicht eindeutig. Für partielle Differenzierbarkeit sind die folgenden Grenzwerte zu kontrollieren:

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}, \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

   Zur Visualisierung der grafischen Darstellung können Sie den folgenden Mathematica-Befehl probieren:

   ```
   Plot3D[2y x^2/(x^4+y^2),{x,-1,+1},{y,-1,+1},PlotPoints->100]
   ```

3. Tangentenebene

   (a) Stellen Sie die Funktion grafisch dar

   $$f(x,y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5} \overset{\text{Q.E.}}{=} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

   und bestimmen Sie die Tangentenebene durch den Punkt $(2, 3, \sqrt{2})$. Existiert eine (eindeutige) Tangentenebene durch den Punkt $(1, 2, 0)$?

   (b) Stellen Sie die Funktion grafisch dar

   $$g(x,y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6}$$

   und bestimmen Sie die Tangentenebene durch den Punkt $(2, 3, \sqrt{3})$. Existiert eine (eindeutige) Tangentenebene durch den Punkt $(1, 2, 1)$?

   Zur Visualisierung der grafischen Darstellungen können Sie die folgenden Mathematica-Befehle probieren:

```
Plot3D[{Sqrt[(x-1)^2+(y-2)^2],(x-2)/Sqrt[2]+(y-3)/Sqrt[2]+Sqrt[2]},{x,0,2},{y,1,3},PlotPoints->100]
Plot3D[{Sqrt[1+(x-1)^2+(y-2)^2],(x-2)/Sqrt[3]+(y-3)/Sqrt[3]+Sqrt[3]},{x,0,2},{y,1,3},PlotPoints->100]
```

4. Lokale Extrema

   Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

   $$f(x,y) = \frac{x}{3}\left(\frac{x^2 - 3}{1 + y^2}\right)$$

   und begründen Sie Ihre Ergebnisse anhand der Bedingungen der lokalen Extrema.

5. Sattelpunkte

   Finden Sie einen Sattelpunkt der Funktion

   $$f(x,y) = xy$$

   und begründen Sie Ihr Ergebnis anhand der Charakterisierung eines Sattelpunkts.