Integral- und Differentialrechnungen für USW
Übungsblatt 10, Ausarbeitung ab dem 12.Dezember 2016

1. Flächeninhalt unter einer Kurve:

   (a) Berechnen Sie das bestimmte Integral von $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ zwischen $x = -1$ und $x = 0$.

   (b) Berechnen Sie das bestimmte Integral von $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ zwischen $x = 0$ und $x = +1$.

   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Kurve $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ für $x \in [-1, +1]$ und der x-Achse.

2. Flächeninhalt zwischen Kurven

   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Kurven $u(x) = x^3 - x - 3$ und $v(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ für $x \in [0, 2]$. (Hinweis: Man findet zuerst den Wert $x_0 \in [0, 2]$, im dem $u(x_0) = v(x_0)$ gilt.)

   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Kurven $f(x) = 1/x^{\frac{1}{3}}$ und $g(x) = 1/x^{\frac{1}{4}}$ für $x \in [0, (\frac{9}{8})^{12}]$. (Bemerkung: $f(x), g(x) \to +\infty$ für $x \to 0^+$, aber der Flächeninhalt ist endlich.)

3. Leibniz-Regel

   (a) Um die Funktion zu vereinfachen, berechnen Sie das bestimmte Integral,

   $$F(x) = \int_{\sin(x)}^{\ln(x)} t^2 dt$$

   und dann leiten Sie das Ergebnis ab.

   (b) Leiten Sie $F(x)$ mit der Leibniz-Regel ab, und vergleichen Sie das Ergebnis mit jenem des letzten Teils.

   (c) Bestimmen Sie die Ableitung von

   $$F(x) = \int_{\tan^{-1}(x)}^{\tan(x)} e^{-t^2} dt$$

4. Numerische Integralrechnung

   Die so-genannte *Error Function* $\mathrm{erf}(x)$ ist definiert durch,

   $$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

   (a) Zur Approximation des Werts $\mathrm{erf}(1)$ bilden Sie eine Riemannsche Summe mit der Teilung

   $$t_i = i/n, \quad i = 0, \dots, n, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1/n, \quad i = 1, \dots, n$$

   des Intervalls $[0, 1]$ und mit Auswertungen der Funktion $2e^{-t^2}/\sqrt{\pi}$ in $\hat{t}_i = t_i$, $i = 1, \dots, n$.

(b) Werten Sie diese Riemannsche Summe in $n = 10, 100, 1000, 10000$ aus.
Hinweis: Zum Beispiel für $n = 10$ bzw. 100 bekommt man das numerische Ergebnis mit den Wolfram Befehlen,

```
Sum[(2./10) Exp[-(i/10)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 10}]
```

und

```
Sum[(2./100) Exp[-(i/100)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 100}]
```

(c) Vergleichen Sie den approximierten Wert mit dem Wert erf(1).
Hinweis: Man bekommt diesen Wert mit dem Wolfram Befehl,

```
Erf[1.]
```

5. Trennbare Differentialgleichungen

(a) Lösen Sie das Problem des exponentiellen Wachstums,

$$m'(t) = 2m(t), \quad m(0) = 3$$

(b) Lösen Sie das Problem des logistischen Wachstums,

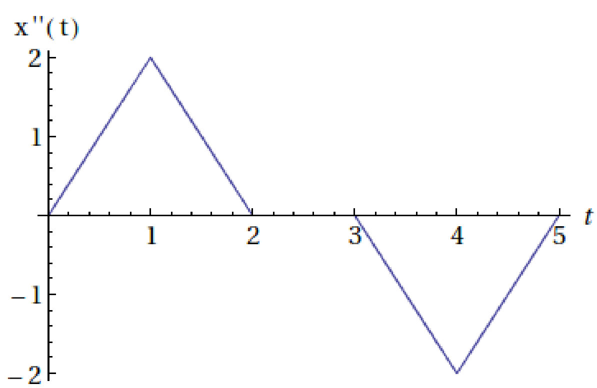
$$p'(t) = p(t)(1 - p(t)), \quad p(0) = 1/2$$

6. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung

(a) Sei $x(t)$ die Höhe in Meter eines Steins zur Zeit t Sekunden. Zur Zeit $t = 0$ lässt man den Stein von 10 Meter hoch frei fallen, d.h. die Anfangshöhe ist $x(0) = 10$ und die Anfangsgeschwindigkeit ist $x'(0) = 0$. Angenommen ist die Beschleunigung eines fallenden Objekts auf der Erdoberfläche gegeben durch die Konstante $g = 9.8$ Meter/Sekunde^2, d.h. die Beschleunigung des Steins ist $x''(t) = -g$.

i. Finden Sie $x'(t)$ und $x(t)$.
ii. Finden Sie die Aufprallszeit τ des Steins, d.h. $x(\tau) = 0$.
iii. Finden Sie die Aufprallsgeschwindigkeit des Steins, d.h. $x'(\tau)$.

(b) Beginnend mit Geschwindigkeit $x'(0) = 0$ fährt man 5 Minuten auf der Autobahn von einer Einfahrt mit $x(0) = 0$ bis zu einer Ausfahrt mit folgender Beschleunigung.



Hier ist Zeit t in Minuten und die Beschleunigung $x''(t)$ ist in Kilometer/Minuten^2.

i. Finden Sie $x'(t)$ und $x(t)$, und stellen Sie diese grafisch dar.
ii. Wie weit fährt man von der Einfahrt bis zu der Ausfahrt?
iii. Was ist die durchschnittliche Geschwindigkeit während dieser Fahrt?