Integral- und Differentialrechnungen für USW
Übungsblatt 7, Ausarbeitung ab dem 21.November 2016

1. Steigende und fallende Funktionen:

   Für die Funktion $r(t) = t/(2t + 3)$ bestimmen Sie die Werte $t \in \mathbb{R}_+$, bei denen gilt

   $$|r(t) - r^*| < 1/10 \quad \text{wobei} \quad r^* = \lim_{t\to\infty} r(t)$$

   Hinweis: Man bestimmt die Stelle τ, bei der die *Gleichung* gilt

   $$|r(t) - r^*| = 1/10$$

   und dann zeigt man wie auf Seite 198 im Skriptum, die gewünschte *Ungleichung* gilt für $t > \tau$.

2. Bildbereich durch lokale Extrema:

   Anhand der lokalen Extrema bestimmen Sie die Bildbereiche der folgenden Funktionen auf den gegebenen Definitionsbereichen.

   (a) $p_1(x) = (4 - 5x^2 + x^4)/2$, $D = [-2, +2]$
   (b) $p_2(x) = 1 + x - x^3 - x^4$, $D = [-2, +2]$
   (c) $r_1(x) = 3x/(1 + x^2)$, $D = [-2, +2]$
   (d) $r_2(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$, $D = [0, 5]\backslash\{1, 3\}$

   Hinweis: Sehen Sie Seiten 31, 35 und 68 im Skriptum.

3. Kriterien der lokalen Extrema:

   (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der auf Seiten 92 - 101 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der ersten Ableitung zutrifft.
   (b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der zweiten Ableitung zutrifft.

4. Sonderfälle von Extremstellen:

   Stellen Sie die folgenden Funktionen $f_1(x), \ldots, f_4(x)$ grafisch dar, und lösen Sie anschließend die Aufgabestellungen.

   (a) Zeigen Sie, $f_1(x) = x^4$ besitzt eine lokale Minimumstelle in $x = 0$, die mit dem Kriterium der ersten Ableitung aber nicht mit dem Kriterium der zweiten Ableitung identifiziert wird.
   (b) Zeigen Sie, $f_2(x) = \text{sign}(x)/(1+|x|)$, $x \neq 0$, $f_2(0) = 1$, besitzt eine lokale Maximumstelle in $x = 0$. Findet man diese Stelle mit dem Kriterium der ersten oder der zweiten Ableitung?
   (c) Zeigen Sie, $f_3(x) = x^3$ hat eine Nullstelle der ersten Ableitung, die keiner lokalen Extremstelle entspricht.
   (d) Zeigen Sie, $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2}$ besitzt eine lokale Minimumstelle in $x = 0$, die mit dem Kriterium der ersten Ableitung aber nicht mit dem Kriterium der zweiten Ableitung identifiziert wird, und zwar gibt es keine zweite Ableitung an dieser Stelle.

5. Wendepunkte:

   (a) Zeigen Sie, $g_1(x) = x^4$ besitzt eine Nullstelle der zweiten Ableitung in $x = 0$, obwohl diese Stelle keinem Wendepunkt entspricht.

   (b) Zeigen Sie, $g_2(x) = \sqrt[3]{x}$ besitzt keine zweite Ableitung in $x = 0$, aber diese Stelle entspricht einem Wendepunkt.

   (c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen.

6. Logistisches Wachstum:

   (a) Für verschiedene Parameter (K, t_0, τ) stellen Sie die *logistische Funktion* grafisch dar,

   $$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

   Hinweis: Durch diese grafischen Darstellungen wird ersichtlich, K ist die *Kapazität* einer Population, t_0 ist die *Wendezeit* des Wachstums und τ ist die *Zeitskala* des Wachstums.

   (b) Für fixierte Werte (K, t_0, τ) zeigen Sie, $(t_0, K/2)$ ist ein Wendepunkt für die Funktion.

   (c) Mit den Daten $P(0) = 1$, $P(\ln(2)) = 4/3$ und $P(\ln(4)) = 8/5$ bestimmen Sie die entsprechenden Parameter (K, t_0, τ).