Integral- und Differentialrechnungen für USW
Übungsblatt 6, Ausarbeitung ab dem 14.November 2016

1. Grafische Beziehung zwischen Funktion und Ableitung:

   Sei $f(x) = x^3 - x$.

   (a) Bestimmen Sie $f'(x)$.

   (b) Stellen Sie $f(x)$ und $f'(x)$ gemeinsam grafisch dar und erklären Sie die Beziehung zwischen den Graphen.

   (c) Bestimmen Sie die Tangentengeraden durch die Punkte

   $$(-1, f(-1)), \quad (-1/\sqrt{3}, f(-1/\sqrt{3})), \quad (0, f(0)), \quad (+1/\sqrt{3}, f(+1/\sqrt{3})) \quad \text{und} \quad (+1, f(+1)).$$

   (d) Stellen Sie $f(x)$ und die Tangentengeraden gemeinsam grafisch dar.

   Hinweis: Sehen Sie das 1. Beispiel auf dem 1. Übungsblatt.

2. Ableitungen von log und exp-Funktionen:

   Bestimmen Sie die Ableitungen

   (a) $f_1(x) = \ln(u(x))$

   (b) $f_2(x) = \log_2(u(x))$

   (c) $f_3(x) = e^{u(x)}$

   (d) $f_4(x) = 2^{u(x)}$

   für eine allgemeine Funktion $u(x)$ und dann für die bestimmten Funktionen,

   (i) $u(x) = x$, (ii) $u(x) = xe^x$, (iii) $u(x) = (1 + \ln(x))/(1 + e^x)$, (iv) $u(x) = \ln(1 + x^2)$,

3. Ableitungen von Winkelfunktionen und ihrer Umkehrfunktionen:

   Bestimmen Sie die Ableitungen

   (a) $g_1(x) = \sin(u(x))$

   (b) $g_2(x) = \cos(u(x))$

   (c) $g_3(x) = \tan(u(x))$

   (d) $g_4(x) = \sin^{-1}(u(x))$

   (e) $g_5(x) = \cos^{-1}(u(x))$

   (f) $g_6(x) = \tan^{-1}(u(x))$

   für eine allgemeine Funktion $u(x)$ und dann für die bestimmten Funktionen,

   (i) $u(x) = x$, (ii) $u(x) = x\sin(x)$, (iii) $u(x) = (1+\sin(x))/(1+\cos(x))$, (iv) $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2)$

4. Vorbereitung auf die Monotonie und die Krümmung:

   Verwenden Sie zutreffende Regeln, um die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen zu berechnen. Für jedes $i = 1, \ldots, 14$ stellen Sie $y_i(x)$, $y_i'(x)$ und $y_i''(x)$ gemeinsam grafisch dar.

(a) $y_1(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$

(b) $y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

(c) $y_3(x) = x^4$

(d) $y_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$

(e) $y_5(x) = 1/(2x^2)$

(f) $y_6(x) = |x|$

(g) $y_7(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$

(h) $y_8(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1$

(i) $y_9(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

(j) $y_{10}(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2)$

(k) $y_{11}(x) = xe^{-x}$

(l) $y_{12}(x) = x\ln(x) - x$

(m) $y_{13}(x) = \sin^2(x)$

(n) $y_{14}(x) = \tan^{-1}(x)/(1 + x^2)$

Hinweis: Sehen Sie Seiten 92 – 101 und Seiten 107 – 116 im Skriptum.

5. Differenzierbarkeit:

Stellen Sie die folgenden Funktionen grafisch dar. Erklären Sie mit Begründung, welche sind an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar.

(a) $z_1(x) = |x|$

(b) $z_2(x) = \sqrt[3]{x}$

(c) $z_3(x) = \mathrm{sign}(x)/(1 + |x|)$

(d) $z_4(x) = x\sin(1/x)$, $x \neq 0$, $z_4(0) = 0$

(e) $z_5(x) = x^2\ln(1/x^2)$, $x \neq 0$, $z_5(0) = 0$

(f) $z_6(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \neq 0$, $z_6(0) = 0$

Hinweis: Laut der Definition soll man die Existenz der Grenzwerte kontrollieren:

$$\lim_{h \to 0} \frac{z_i(h) - z_i(0)}{h - 0}$$