Integral- und Differentialrechnungen für USW
Übungsblatt 3, Ausarbeitung ab dem 24.Oktober 2016

1. Rationale Funktionen:

   (a) Bestimmen Sie die Parameter a, b, x_1, x_2, x_3 und x_4 der rationalen Funktion,

   $$r(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 + 4x + 3} = \frac{a(x - x_1)(x - x_2)}{b(x - x_3)(x - x_4)}$$

   Die Nullstellen des Nenners nennt man *Polstellen*.

   (b) Finden Sie die senkrechten und waagerechten Asymptoten von $r(x)$.

   (c) Anhand der obigen Faktorisierung erstellen Sie eine Tabelle mit dem Vorzeichen der jeweiligen Faktoren in den Teilintervallen zwischen Nullstellen und Polstellen.

   (d) Anhand dieser Tabelle bestimmen Sie ob $r(x)$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, während x sich an eine Polstelle von links oder von rechts annähert.

   (e) Stellen Sie $r(x)$ grafisch dar.

2. Umkehrfunktionen:

   (a) Stellen Sie die Funktion $y(x) = (x - 1)^4$ grafisch dar, und lesen Sie den Definitionsbereich D und Bildbereich B von der Grafik ab.

   (b) Bestimmen Sie eine maximale Teilmenge $D_y \subset D$, sodass $y(x)$ auf dem (möglicherweise eingeschränkten) Definitionsbereich D_y mit dem entsprechenden Bildbereich $B_y \subset B$ eine Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$ besitzt.

   (c) Bestimmen Sie eine Formel für diese Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$.

   (d) Stellen Sie die Umkehrfunktion grafisch dar und lesen den Definitionsbereich $D_{y^{-1}}$ und den Bildbereich $B_{y^{-1}}$ von der Grafik ab.

   (e) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen D_y, B_y, $D_{y^{-1}}$ und $B_{y^{-1}}$?

3. Translationen und Streckungen von Funktionen:

   (a) Finden Sie zuerst eine Streckung der Funktion $q(x) = x^2$ und nachher eine Translation dieser Streckung, wobei das Ergebnis mit der quadratischen Funktion $\tilde{q}(x) = 2(x - 3)^2 + 4$ übereinstimmt. Stellen Sie $q(x)$ und $\tilde{q}(x)$ grafisch dar.

   (b) Finden Sie zuerst eine Streckung der Funktion $b(x) = |x|$ und nachher eine Translation dieser Streckung, wobei das Ergebnis mit der Betragsfunktion $\tilde{b}(x) = 2|x - 3| + 4$ übereinstimmt. Schreiben Sie $b(x)$ und $\tilde{b}(x)$ stückweise und stellen Sie diese Funktionen grafisch dar.

4. Exponentielle und Logarithmische Funktionen:

   (a) Stellen Sie die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = \ln(x)$ grafisch dar und lesen Sie D_f, B_f, D_g und B_g aus den Grafiken ab.

   (b) Werten Sie f in den g-Werten im Graphen von g aus, um einen Graphen von $f \circ g$ zu erstellen und dabei bestätigen, es gilt $f(g(x)) = \exp(\ln(x)) = x$ nur für $x \in \mathbb{R}_+$.

(c) Werten Sie g in den f-Werten im Graphen von f aus, um einen Graphen von $g \circ f$ zu erstellen und dabei bestätigen, es gilt $f(g(x)) = \ln(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Teil (b) bedeutet $D_{f\circ g} = \mathbb{R}_+$ und Teil (c) bedeutet $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$. Weiters gelten $f^{-1} = g$ und $g^{-1} = f$.

5. Exponentielle und Logarithmische Funktionen:

   (a) Anhand der Daten $w(0) = 2$ und $w(2) = 1$ bestimmen Sie die Funktion $w(t) = w_0 e^{\lambda t}$.

   (b) Eine radioaktive Substanz wird in einem Labor produziert. Nach 1 Jahr bleibt 3 kg der Substanz, und nach 2 Jahren bleibt 1 kg der Substanz. Finden Sie die Halbwertzeit der Substanz.

6. Winkelfunktionen:

   (a) Stellen Sie die Funktion $y(x) = \tan(x)$ mit $D_y = (-\pi/2, +\pi/2)$ grafisch dar und lesen Sie B_y von der Grafik ab.

   (b) Bestätigen Sie, dass $y(x)$ eine Umkehrfunktion $y^{-1}(x) = \arctan(x)$ besitzt, und stellen Sie diese grafisch dar.

   (c) Für die Auswertungen

$$\sin(4\pi/3), \quad \sin(7\pi/6), \quad \sin(-\pi/4),$$
$$\arcsin(1), \quad \arcsin(1/\sqrt{2}) \quad \text{und} \quad \arcsin(-\sqrt{3}/2)$$

   verwenden Sie (i) die wohlbekannten Werte der Winkelfunktionen und (ii) einen Taschenrechner. Achtung: Der Taschenrechner soll mit Radiant nicht Grad (rad nicht deg) eingestellt werden; sonst sind die Ergebnisse falsch, da diese *Funktionen* bezüglich Radianten definiert sind.