

Integral und Differentialrechnung für USW
Ergänzungsblatt, 15.11.2010

1. Gegeben seien folgende Teilmengen in \mathbb{R} : $A = (4, 6]$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 5, 1\}$ und $D = [3, 7)$ in Intervallschreibweise oder in aufzählendem Verfahren. Bestimmen Sie $(A \cup B) \cap C$, $(B \setminus C) \cap C$, $C \times C$, und $(B \times D) \cap (D \times A)$. Veranschaulichen Sie diese Mengen als Punktmengen in \mathbb{R} , bzw. \mathbb{R}^2 .
2. Stellen Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $(-2, -1)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$ als Menge von geordneten Paaren dar.
3. Finden Sie eine geeignete Beschreibung folgender Teilmengen des \mathbb{R}^2 .

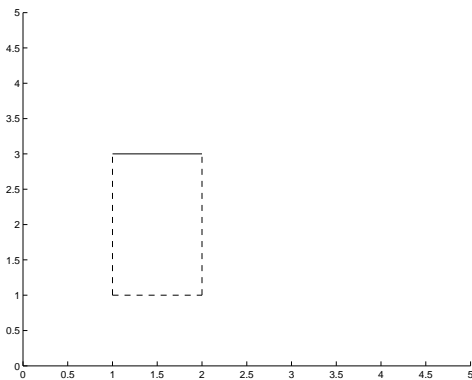


Figure 1:

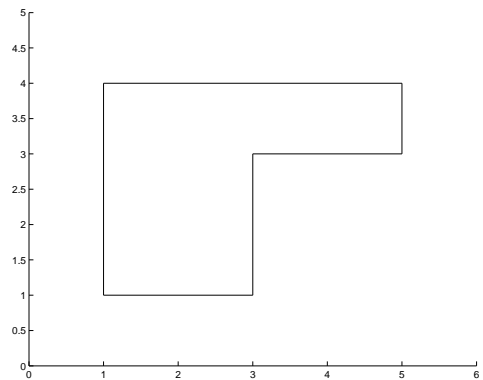


Figure 2:

4. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?
 - (a) $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) $|x| \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $|x| < 0$ für alle $x < 0$.
5. Lösen Sie in \mathbb{R} die Ungleichung $\frac{2x+1}{x+2} > 1$.
6. Lösen Sie die Ungleichung $(x-4)(x+2) \leq 0$.
7. Lösen Sie die Ungleichung $|3x-6| + 3 > -x+1$.
8. Lösen Sie die Ungleichung $-(x+2)(x-1) > 2$.
9. Stellen Sie $z = \frac{3+4i}{-2+3i}$ in der Form $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dar. Berechnen Sie $\frac{1}{z}$.
10. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

$$|1 + 2i| > 0, \quad -3 - 2i < 0, \quad 3i > 0, \quad |-1 + i| \leq 0.$$

11. Skizzieren Sie die Menge $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq -2, \operatorname{Im} z < 1\}$ in der Gaußschen Zahlenebene.
12. Skizzieren Sie den Graph einer Abbildung f welche das Intervall $[-3, -1]$ nicht injektiv und nicht surjektiv in das Intervall $[-2, -1]$ abbildet.
13. Betrachten Sie die Graphen der Abbildungen f, g und h :

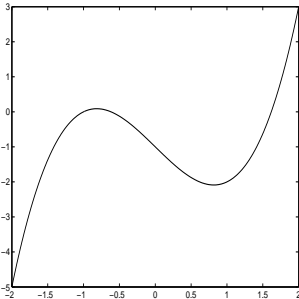


Figure 3: f

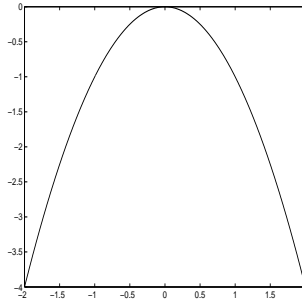


Figure 4: g

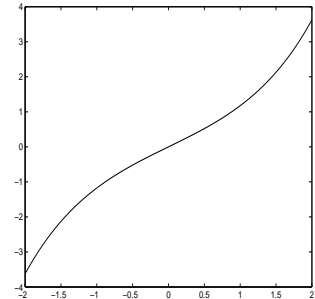


Figure 5: h

Welche der Abbildungen $f: [-2, 2] \rightarrow [-5, 3]$, $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: [-2, 2] \rightarrow [-3.63, 3.63]$ ist injektiv, surjektiv, bijektiv?

14. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
15. Gegeben sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -8x + 2$. Zeigen Sie: f ist injektiv und surjektiv und bestimmen Sie f^{-1} .
16. Gegeben sei die Abbildung $x \rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild von f . Ist f injektiv? Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion an.
17. Geben sie den Definitionsbereich der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x-3}$ und $g(x) = (x-1)^2$ an. Bilden Sie die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ und bestimmen Sie deren Definitionsbereich.
18. Stellen Sie $f(x) = \left(\frac{2-x^2}{x^2+1}\right)^2$ als Verkettung von 3 einfacheren Funktionen dar.
19. f und g seien Funktionen, welche an der Stelle x_0 jeweils einen Grenzwert besitzen. Sind folgende Aussagen richtig?
 - (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.
 - (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$.
 (Es können auch beide Aussagen richtig oder beide Aussagen falsch sein).
20. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$.
21. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{1-x^2}$.
22. Zeichnen Sie den Graph einer Funktion f mit folgenden 4 Eigenschaften: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

23. Skizzieren Sie den Graph einer Abbildung $f: [-2, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, f ist monoton wachsend auf $[-2, 0]$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

24. Für welche Werte von a existiert der Grenzwert der Abbildung $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ax - 3 & x \geq 1 \end{cases}$ an der Stelle $x = 1$?

25. Es sei $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ x^3 & -1 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$. Existieren die Grenzwerte in $x = -1$ und $x = 1$?

26. Gegeben sei folgender Graph der Umkehrfunktion von f . Zeichnen Sie den Graphen von f .

