Voraussage für den Film *Supersize Me*

Problemstellung: Um den schädlichen Effekt des Essens vom McDonalds zu zeigen, isst der Filmmacher nur bei McDonalds und dreimal täglich über 30 Tage. Er isst jedes Produkt mindestens einmal, und wenn sie fragen, "Wollen Sie das *super-sized* haben?" (d.h. ein Sonderangebot, wobei man fast doppel so viel bekommt), ist die Antwort immer "Ja". Er isst ungefähr 5000 kcal/Tag und macht weniger als 5000 Schritte täglich. Im Lauf der 30 Tage nimmt er von 84kg bis 95.5kg zu. Die Frage ist, wie hätte man diese Zunahme voraussagen können? An Hand einer mit diesen Daten übereinstimmenden mathematischen Formulierung stellt sich weiter die Frage, "Was wäre sein Gewicht, wenn er das Programm fortsetzen (und überleben) sollte, bis sein Gewicht sich nicht mehr ändert?"

Eine mögliche Lösung: Zuerst braucht man ein zutreffendes Prinzip oder physikalisches Gesetz. Dann kann man die verfügbare Information in diesem Kontext verwenden und die nicht notwendige Information vernachlässigen. Da das Problem um *Masse* geht, ist das Prinzip der *Massenerhaltung* ein vernünftiger Startpunkt. In Wörtern besagt dieses Prinzip:

$$\begin{aligned}\text{Zunahme an Masse in einem Tag} &= \text{Einführ an Masse in einem Tag}\\ &- \text{Ausführ an Masse in einem Tag}\end{aligned}$$

Die Einführ kommt rein von McDonalds. Jedoch ist die gegebene Information dass er eine gewisse Menge von Energie täglich einnimmt. Dieser Energiefluß muss in Massenfluß umgewandelt werden. Dafür bracht man die Energiedichte von Lebensmittel. Man kann die folgenden Energiedichten nachschlagen:

Kohlenhydrat:	4 kcal/Gramm
Eiweiss:	4 kcal/Gramm
Fett:	9 kcal/Gramm

Also wenn er nur Fett essen würde, wäre der Massenfluß 5000 kcal/Tag $\div$ 9 kcal/Gramm = $555\frac{5}{9}$ Gramm/Tag. Wenn er kein Fett essen würde, wäre der Massenfluß höher bei 5000 kcal/Tag $\div$ 4 kcal/Gramm = 1250 Gramm/Tag, weil bei niedrigerer Energiedichte er mehr essen muss, um auf 5000 kcal/Tag zu kommen. Für das Essen bei McDonalds insbesondere kann man nachschlagen, die Energiedichte einer üblichen Mischung ist:

McDonalds Essen: 7.8 kcal/Gramm

Mit dieser Energiedichte bekommt man,

$$\begin{aligned}\text{Einführ an Masse in einem Tag} &= 5000 \text{ kcal/Tag} \div 7.8 \text{ kcal/Gramm} \div 1000 \text{ Gramm/kg}\\ &= \tfrac{25}{39} \text{ kg/Tag.}\end{aligned}$$

Für die Ausführ an Masse in einem Tag braucht man den täglichen Massenverbrauch. Dafür kann man die Daumenregel nachschlagen:

$$\text{Täglicher Energieverbrauch} = 21.6 \text{ kcal/kg/Tag} \times m \text{ kg} = 21.6 \cdot m \text{ kcal/Tag}$$

wobei m die Anzahl der kg bedeutet, d.h. $m = 84$ zu Beginn des Programms. In dieser Daumenregel wird angenommen, dass nicht sehr viel Sport getrieben wird. Da er täglich weniger als 5000 Schritte macht, wird die Daumenregel verwendet. Um den täglichen Massenverbrauch daraus herzuleiten, wird die McDonalds Energiedichte verwendet:

$$\begin{aligned}\text{Täglicher Massenverbrauch} &= 21.6 \cdot m \text{ kcal/Tag} \div 7.8 \text{ kcal/Gramm} \div 1000 \text{ Gramm/kg}\\ &= \tfrac{9}{3250} \cdot m \text{ kg/Tag}\\ &= \text{Ausführ an Masse in einem Tag}\end{aligned}$$

Nun kann Massenerhaltung für die Zunahme so formuliert werden:

$$\text{Zunahme an Masse in einem Tag} = [\tfrac{25}{39} - \tfrac{9}{3250} \cdot m] \text{ kg/Tag}$$

Laut dieser Formel ist die Massenzunahme am ersten Tag: $[\frac{25}{39} - \frac{9}{3250} \cdot 84]$ kg/Tag ≈ 0.4 kg/Tag. Wenn diese Zunahme über 30 Tage fortgesetzt wäre, wäre die gesamte Zunahme

$$30 \text{ Tag} \times 0.4 \text{ kg/Tag} \approx 12.25 \text{ kg}.$$

und das Gewicht am Ende der 30 Tage wäre $84 + 12.25 = 96.25$ kg. Also mit dieser Methode wird das Gewicht überschätzt. Man erkennt aber, dass die Formel für die tägliche Zunahme 30 Mal mit einer fixierten Masse verwendet worden ist, während die Masse in dieser Formel sich täglich ändern soll. Die Aktualisierung dieser Masse 30 Mal führt zu einer fehlerhaften Rechnung. Diese kann mit folgenden Überlegungen vereinfacht werden.

Zweiter Ansatz: Sei $m(t)$ die Anzahl der kg zur Zeit t Tag, wobei $t = 0$ dem Beginn des Programms entspricht, d.h. $m(0) = 84$ und $m(30)$ soll nah bei 95.5 landen. Die obige Formel für die Zunahme an Masse in einem Tag wird dann:

$$m(t+1) - m(t) = a - b \cdot m(t), \qquad a = \tfrac{25}{39}, \quad b = \tfrac{9}{3250}$$

Zum Beispiel ist die Zunahme am ersten Tag $m(1) - m(0) = a - b \cdot 84 \approx 12.26$ wie oben gerechnet. Für den Fall dass die Zunahme $a - b \cdot m$ Null wird, definiert man die besondere Anzahl der kg:

$$a - b \cdot m^* \quad \Rightarrow \quad m^* = \frac{a}{b} = \frac{25}{39} \cdot \frac{3250}{9} \approx 231.5$$

Das heisst, wenn in einem gewissen Zeitpunkt t, gilt $m(t) = m^*$, ist die Zunahme Null. Man nennt m^* das *Gleichwicht*. Bezüglich dieses Gleichgewichts gilt:

$$\begin{aligned} m(t+1) - m^* &= m(t) + a - b \cdot m(t) - m^* \\ &= [a - b \cdot m^*] + (1-b)[m(t) - m^*] \\ &= (1-b)[m(t) - m^*] \end{aligned}$$

Diese Formel bedeutet, der Abstand $[m(t+1) - m^*]$ zwischen dem Gleichgewicht und der Masse zur Zeit $t + 1$ ergibt sich durch den Abstand $[m(t) - m^*]$ zwischen dem Gleichgewicht und der Masse zur Zeit t reduziert nach dem Faktor $(1 - b) = 3241/3250$. Also reduziert sich dieser Abstand ständig im Lauf der Zeit. Da der Zeitpunkt t beliebig ist, kann man diese Formel mehrmals anwenden, um die Masse nach $t = n$ Tagen zu bekommen:

$$\begin{aligned} [m(n) - m^*] &= (1-b)^1[m(n-1) - m^*] \\ &= (1-b)^2[m(n-2) - m^*] \\ &\dots \\ &= (1-b)^n[m(n-n) - m^*] \qquad m(0) = m_0 \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz kriegt man die folgende gesamte Zunahme über 30 Tage:

$$m(30) = m^* + (1-b)^{30}[m_0 - m^*] \approx 231.5 + \left(\frac{3241}{3250}\right)^{30} [84 - 231.5] \approx 95.77$$

Dritter Ansatz: Das letzte Ergebnis kommt näher zum gemessenen Gewicht am Ende des Programms, aber das Gewicht wird immer noch überschätzt. Man erkennt aber, dass die Formel für die Zunahme nur einmal täglich verwendet wird, während Zunahme ständig stattfindet. Wenn die Formel in Halbtagen angewendet wird, ergibt sich:

$$m(t + \tfrac{1}{2}) - m(t) = \tfrac{1}{2}[a - b \cdot m(t)]$$

wobei $[m(t + \frac{1}{2}) - m(t)]$ die Zunahme in dem halben Tag zwischen t und $t + \frac{1}{2}$ ist, und die tägliche Ein- und Ausführraten auf der rechten Seite halbiert sind. Wenn ein Tag nicht nur in 2 Teile sondern in k Teile geteilt ist, ergibt sich die allgemeinere Formel:

$$m(t + \tfrac{1}{k}) - m(t) = \tfrac{1}{k}[a - b \cdot m(t)]$$

Wie beim zweiten Ansatz kann diese Formel bezüglich des Abstands zum Gleichgewicht umformuliert werden:

$$\begin{aligned} m(t+\tfrac{1}{k}) - m^* &= m(t) + \tfrac{1}{k}[a - b \cdot m(t)] - m^* \\ &= (1 - \tfrac{b}{k})[m(t) - m^*] \end{aligned}$$

Wie beim zweiten Ansatz kann man diese Formel mehrmals anwenden, um die Masse nach $t = n$ Tagen zu bekommen:

$$\begin{aligned} [m(n) - m^*] &= (1 - \tfrac{b}{k})^1 [m(n - \tfrac{1}{k}) - m^*] \\ &= (1 - \tfrac{b}{k})^2 [m(n - \tfrac{2}{k}) - m^*] \\ &\ \ \cdots \\ &= (1 - \tfrac{b}{k})^{k \cdot n} [m_0 - m^*] \end{aligned}$$

Wenn die Anzahl k der Teile eines Tages extrem groß wird, bekommt man:

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{b}{k}\right)^k = e^{-b}$$

wobei $e = 2.7182818\cdots$ die Basis des natürlichen Logarithmus ist. Mit diesem Limus ist die Formel für die Masse:

$$m(n) = m^* + e^{-b \cdot n}[m_0 - m^*]$$

Nach diesem Ansatz kriegt man die folgende gesamte Zunahme über 30 Tage:

$$m(30) \approx 231.5 + e^{-9 \cdot 30/3250} \cdot [84 - 231.5] \approx 95.76$$

Dieses Ergebnis kommt ein bisschen näher zum gemessenen Gewicht am Ende des Programms. Zusätzlich ermöglicht dieser Ansatz die Untersuchung des Gleichgewichts, während der erste Ansatz dafür nicht geeignet ist.

Untersuchung des Gleichgewichts: Mit der gewonnenen Formel für die Masse

$$m(t) = m^* + e^{-bt}[m_0 - m^*]$$

kann man das Gleichgewicht m^* untersuchen. Wie oben in der Definition von m^* erklärt, wenn der Filmmacher mit dem McDonalds Programm fortsetzten (und überleben) sollte, gäbe es beim Gewicht 231.5 kg keine Zunahme mehr. Es stellt sich aber die Frage, wie lang dauert es, bis er z.B. 90% des Wegs zum Gleichgewicht hinkommt? Das heisst, man sucht die Zeit T wobei gilt:

$$0.1 = \frac{m(T) - m^*}{m_0 - m^*} = e^{-bT}$$

oder mit dem natürlichen Logarithmus von beiden Seiten,

$$\ln(0.1) = \ln(e^{-bT}) = -bT \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{1}{b}\ln(0.1) \approx 831.49$$

Also dauert es ziemlich lang, bis das Gewicht zu $m(T) = 216.73$ kommt, wie man im Kreis-markierten Punkt der folgenden Graphik sieht. Anscheinend führt die Abhängigkeit von der Masse in der Formel für die Zunahme dazu, dass das Gewicht sich immer langsamer ändert, bis das Gleichgewicht nach unendlicher Zeit erreicht wird.