# Angewandte Übung mit Exponentialfunktionen und Logarithmen

**Problemstellung**: Die Hausheizung wird im Winter ausgeschaltet. Wie lang dauert es, bis die Innentemperatur 90% des Weges zur Aussentemperatur kommt?

**Lösung**: Seien $T_{\mathrm{A}}$ die Aussentemperatur und $T$ die Innentemperatur. Sei $E$ die Gesamtwärme im Haus. Nach dem Newtonschen Kühlungsgesetz kann die Beziehung zwischen $E$, $T$ und $T_{\mathrm{A}}$ so modelliert werden:

$$E'(t) = hS[T_{\mathrm{A}} - T(t)].$$

Hier ist $E'(t)$ die zeitliche Änderungsrate der Wärme in der Zeit $t$, $h$ ist der Wärmetauschkoeffizient der Grenzfläche und $S$ ist der Grenzflächeninhalt. Nach dem obigen Modell sieht man, je höher ist $T_{\mathrm{A}} - T(t)$, desto schneller kommt Wärme ins Haus; je höher ist $T(t) - T_{\mathrm{A}}$, desto schneller geht Wärme aus dem Haus. Die Beziehung zwischen $E$ und $T$ ist von der Thermodynamik gegeben durch

$$E = \rho c V T.$$

Hier ist $\rho$ die Dichte der Innenluft, $c$ ist die Wärmekapazität der Innenluft und $V$ ist das Volumen der Innenluft. Da $\rho$, $c$ und $V$ zeitunabhängig sind, haben wir schliesslich das folgende Modell:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_{\mathrm{A}} - T(t)], \quad t > t_0, \quad T(t_0) = T_0.$$

Hier ist $T_0$ die Anfangstemperatur im Haus, d.h. zur Zeit $t = t_0$. Diese Gleichung kann so umgeschrieben werden:

$$\frac{T'(t)}{T(t) - T_{\mathrm{A}}} = -\frac{hS}{\rho c V}$$

und so gelöst werden:[1]

$$\cdots = \int_{t_0}^{t} \frac{T'(\tau)}{T(\tau) - T_{\mathrm{A}}} d\tau = -\int_{t_0}^{t} \frac{hS}{\rho c V} d\tau = \cdots$$

Die Lösung ist:

$$\ln[T(t) - T_{\mathrm{A}}] - \ln[T(t_0) - T_{\mathrm{A}}] = -\frac{hS}{\rho c V}[t - t_0]$$

Wegen der Regel, $\ln A - \ln B = \ln A/B$, folgt:

$$\ln\left(\frac{T(t) - T_{\mathrm{A}}}{T_0 - T_{\mathrm{A}}}\right) = -\frac{hS}{\rho c V}[t - t_0]$$

wobei $T(t_0)$ mit $T_0$ ersetzt worden ist. Wegen der Regel, $e^{\ln X} = X,\ \forall X > 0$,[2] kann man die Funktion $e^x$ in beiden Seiten der letzten Gleichung auswerten und erhalten:

$$\frac{T(t) - T_{\mathrm{A}}}{T_0 - T_{\mathrm{A}}} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho c V}[t - t_0]\right)$$

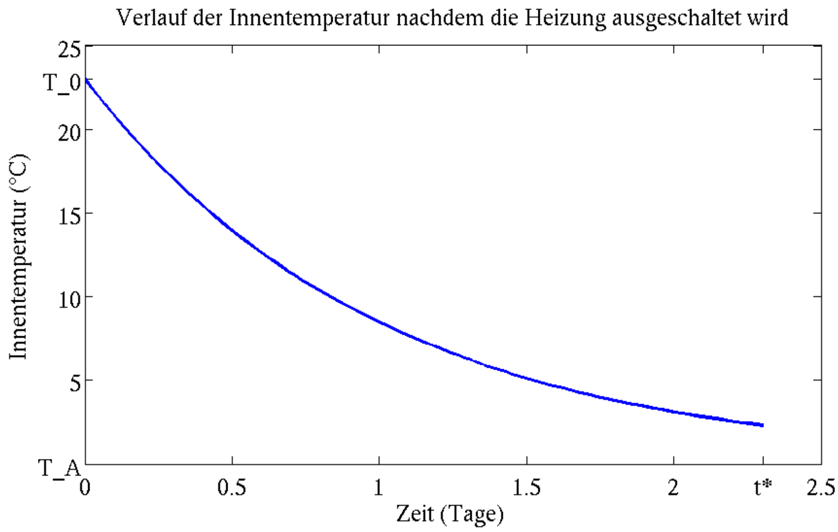
wobei $\exp(x) = e^x$. Die Innentemperatur $T(t)$ ist schliesslich gegeben durch:

$$T(t) = T_{\mathrm{A}} + [T_0 - T_{\mathrm{A}}] \exp\left(-\frac{hS}{\rho c V}[t - t_0]\right).$$

Als Probe sieht man, diese Formel stimmt mit der Anfangstemperatur überein: $T(t_0) = T_{\mathrm{A}} + [T_0 - T_{\mathrm{A}}]e^0 = T_0$. Wenn man die Einheiten von $h$, $S$, $\rho$, $c$ und $V$ betrachtet, sieht man dass der Quotient $(\rho c V)/(hS)$ die Einheit von Zeit hat. Für die Parameter $t_0 = 0$Tage, $T_0 = 23°$C, $T_{\mathrm{A}} = 0°$C und $(\rho c V)/(hS) = 1$Tage sieht man die grafische Darstellung von $T(t)$, $0 \le t \le \ln(10)$, in der folgenden Abbildung:

[1] Bis zum Ende des Semesters werden wir den Lösungsweg kennenlernen.

[2] $D(\ln(X)) = \{X \in \mathbb{R} : X > 0\}$




Nun suchen wir eine Zeit $t^*$, bei der $T(t^*)$ 90% des Weges von $T_0$ bis $T_\mathrm{A}$ liegt, d.h. $[T_0 - T(t^*)] = 0.9[T_0 - T_\mathrm{A}]$ oder

$$[T(t^*) - T_\mathrm{A}] = \{T_0 - 0.9(T_0 - T_\mathrm{A})\} - T_\mathrm{A} = 0.1[T_0 - T_\mathrm{A}].$$

Von der obigen Formel für die Innentemperatur bekommen wir:

$$0.1[T_0 - T_\mathrm{A}] = [T(t^*) - T_\mathrm{A}] = [T_0 - T_\mathrm{A}] \exp\left(-\frac{hS}{\rho c V}[t^* - t_0]\right)$$

oder

$$0.1 = \exp\left(-\frac{hS}{\rho c V}[t^* - t_0]\right)$$

Wegen der Regel, $\ln e^X = X, \forall X$,[3] kann man die Funktion $\ln x$ in beiden Seiten der letzten Gleichung auswerten und erhalten:

$$\ln(0.1) = -\frac{hS}{\rho c V}[t^* - t_0]$$

Wegen der Regel, $\ln A^p = p \ln A$, gilt $\ln(0.1) = \ln(10^{-1}) = -\ln(10)$ und es folgt:

$$\ln(10) = \frac{hS}{\rho c V}[t^* - t_0]$$

oder

$$t^* = t_0 + \ln(10)\frac{\rho c V}{hS}.$$

Für den Fall in der Abbildung gilt $t^* = \ln(10) \approx 2.3026$.

**Beobachtungen**:

- Je kleiner ist $h$ (d.h. je besser ist die Dämmung), desto länger hält die Gesamtwärme im Haus.
- Je kleiner ist $S$ (d.h. je einfacher ist die Oberfläche des Hauses – am besten wäre es, wenn das Haus *kugelförmig* wäre), desto länger hält die Gesamtwärme im Haus.
- Je grösser ist $V$ (d.h. je grösser ist das Haus), desto länger hält die Gesamtwärme im Haus.
- Wenn die Luft überhaupt beeinflusst werden könnte, würde man $\rho$ und $c$ grösser machen wollen, damit die Gesamtwärme länger hält.

[3] $D(e^X) = \mathbb{R}$