PS Höhere Mathematik I. WS 2012/13.
14. Übungsblatt. 22.1.2013

1. *(Diskrete partielle „Integration“)*

   Seien $(a_k)_{k\geq 1}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ zwei Folgen von reellen Zahlen. Beweisen Sie für $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k) = (a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1) - \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}(a_{k+1} - a_k).$$

2. Seien $(a_k)_{k\geq 1}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ zwei Folgen von reellen Zahlen. Beweisen Sie für $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} (a_k b_j - a_j b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

3. Zeigen Sie für $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

4. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

   und berechnen Sie damit

$$\int_0^1 x^2\, dx$$

   indem Sie den Limes einer Riemann-Summe berechnen.

5. Bestimmen Sie jene Stammfunktion F von $f(x) = 4x^3 - 2e^{-2x} + 3\cos(\pi x)$, welche $F(0) = 1$ erfüllt.

Übungsbeispiele für die Klausur

1. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \left(e^x - e^{-x}\right)^{e^x - 1}.$$

2. Berechnen Sie für

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

   den maximalen Definitionsbereich, Nullstellen, Extremwerte, Monotonieverhalten und Grenzwerte am Rand des Definitionsbereichs.

3. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$.

$$a_n = \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+5}, \quad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}, \quad c_n = \frac{n^{\frac{1}{3}}\sin(n)}{\sqrt{n+1}}$$