

PS Höhere Mathematik I. WS 2012/13.

13. Übungsblatt. 15.01.2013

1. Wie muss man den Öffnungswinkel α eines kegelförmigen Trichters (gerader Kreiskegel) vom Volumen $V = \frac{1}{3}$ wählen, damit der Materialverbrauch möglichst klein wird?
2. Einer Ellipse um den Ursprung mit koordinatenachsenparallelen Halbachsen a und b ist ein koordinatenachsenparalleles Rechteck so einzuschreiben, dass die Rechtecksfläche möglichst groß wird.
3. Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |x| - \arctan(|x|)$.
 - Zeigen Sie, dass f zweimal stetig differenzierbar ist und geben Sie die erste und zweite Ableitung an.
 - Weisen Sie nach, dass f ein eindeutiges globales Minimum besitzt und bestimmen Sie dieses.
4. Gegeben sei die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \sqrt{x^2 + 1}$.
 - Weisen Sie nach, dass f ein eindeutiges globales Minimum besitzt und bestimmen Sie dieses.
 - Erklären Sie die allgemeine Idee des Newton-Verfahrens an Hand einer Skizze.
 - Formulieren Sie die Newton-Iteration für die Gleichung $g'(x) = 0$ und zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für keinen Startwert x_0 mit $|x_0| \geq 1$ gegen das eindeutige globale Minimum konvergiert.
5. Durch die Gleichung $y^3 - x^2 - 4 = 0$ wird implizit eine Funktion $x \mapsto y(x)$ mit $y(2) = 2$ bestimmt. Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung in $x = 2$ auf zwei Arten (direkt und implizit).

Zusatzaufgaben:

1. Herr Heinz möchte seinen Gewinn noch mehr steigern und das Maximale aus seiner Firma herausholen. Bei der letzten Besprechung wurden die Kosten seiner Produktion besprochen, welche sich wie folgt zusammenstellten: Die Produktionskosten pro Dose betragen derzeit 0.5 Euro und die fixen Kosten 8000 Euro. Die Firma erzielt durch den Verkauf der Dosen Erlöse, die in Abhängigkeit der angebotenen Menge an Dosen x angegeben werden können: $E(x) = -0.001x^2 + 20.5x$. Wenn die Firma keine Dosen anbietet, erlöst sie nichts. Ab einer bestimmten angebotenen Menge sinken die Erlöse, da der Verkaufspreis einer Dose mit steigender Angebotsmenge sinkt. Bei welcher angebotenen Menge ist der Gewinn der Firma am größten?
2. Die Firma von Herrn Heinz ist sehr erfolgreich, hat inzwischen Tochterfirmen gegründet und entwickelt gerade neue Strategien um den Gewinn zu maximieren. Bei dem letzten Meeting stellte sich heraus, dass im Moment 60000 Saftdosen zu einem Dosenpreis von je 1.85 Euro verkauft werden, wobei die Herstellungskosten 1,10 Euro pro Dose betragen. Laut einer Marktanalyse führt eine Preissenkung um jeweils 3 Cent pro Dose zu einer Absatzsteigerung von 2000 Saftdosen. Zu welchem Preis sollte die Firma die Dosen anbieten, um maximalen Gewinn zu erzielen?