PS Höhere Mathematik I. WS 2012/13.
11. Übungsblatt. 18.12.2012

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich für folgende Funktionen. Wo sind diese differenzierbar?

$$f_1(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}, \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

$$f_4(x) = \sin((x+1)^2(x+2)), \quad f_5(x) = \frac{\sin(x^2)\sin^2 x}{1+\sin x}, \quad f_6 = \sin(\frac{\cos x}{x})$$

2. Sind folgende Funktionen differenzierbar auf $\mathbb{R}$? Sind ihre Ableitungen stetig?.
a) $f(x) = x\sin(1/x)$ für alle $x \neq 0$, und $f(0) = 0$.
b) $g(x) = x^2\sin(1/x)$ für alle $x \neq 0$, und $g(0) = 0$.
c) $h(x) = x^3\sin(1/x)$ für alle $x \neq 0$, und $h(0) = 0$.

3. Gegeben sei $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin x + e^x$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt und berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

4. Beweisen Sie, dass die Gleichung:
a) $6x^4 - 7x + 1 = 0$ höchstens zwei Lösungen hat,
b) $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ genau eine Lösung hat.
(Hinweis: Benützen sie den Satz von Rolle)

Freiwillige Trainingsbeispiele:

5. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ falls $x \neq 0$, und $f(0) = 1$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Untersuchen Sie, ob ihre Ableitung stetig ist.
(Hinweis: $\sin x < x < \tan x,\ x \in (0, \pi/2)$)

6. Beweisen Sie, dass $x^n + ax + b = 0$ höchstens 2 Lösungen hat, falls n gerade ist, und höchstens drei Lösungen, falls n ungerade ist.
(Hinweis: Benützen sie den Satz von Rolle)