PS Höhere Mathematik I. WS 2012/13.
10. Übungsblatt. 11.12.2012

1. Es gilt $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ (Eulersche Zahl). Bestimmen Sie damit die Grenzwerte:

   (a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{an+b} \quad (x, a, b \in \mathbb{R})$ (b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{2n}$

2. Eine komplexe Zahl $z = a + \imath b \in \mathbb{C}$ lässt sich in Polarkoordinaten $r = |z|$ und $\phi = \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ als $z = r(\cos\phi + \imath \sin\phi)$ darstellen.

   (a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von $z = -\sqrt{3} - \imath$.

   (b) Bestimmen Sie die komplexe Zahl z aus Polarkoordinaten $(r, \phi) = \left(4, -\frac{\pi}{4}\right)$.

   Skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

3. Gegeben sei die Hyperbelfunktionen

   $$\cosh(x) := \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \quad \sinh(x) := \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

   Welche Symmetrieeigenschaften haben diese Funktionen? Skizzieren Sie die Funktionen. Bestimmen Sie maximale Intervalle, auf welchen Hyperbelsinus und Hyperbelcosinus monoton steigen bzw. fallen. Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass Sinus Hyperbolicus streng monoton steigt. Für die Monotonie vom Cosinus Hyperbolicus drücken Sie $\cosh(x)$ durch $\sinh(x)$ aus. Andere Lösungswege sind auch möglich.

4. Betrachten Sie die Hyperbelfunktion $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Zeigen Sie

   $$1 - \tanh(x)^2 = \tfrac{1}{\cosh(x)^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

5. Betrachten Sie die inversen trigonometrischen Funktionen $\arctan : \mathbb{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\operatorname{arcot} : \mathbb{R} \mapsto (0, \pi)$. Zeigen Sie

   $$\arctan(x) + \operatorname{arcot}(x) = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

6. Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen (Areafunktionen) des Hyperbelsinus und Hyperbelcosinus und deren maximalen Definitionsbereich. Skizzieren Sie die Funktionen.

Freiwillige Trainingsbeispiele:

7. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[0, 2\pi)$:

   (a) $\sin(5x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$