9. Proseminar Höhere Mathematik I

Aufgaben für den 4.12.2012

1. Eine Bakterienkultur hat ausreichend Platz und Nahrungsmittel, damit ihr Wachstum hemmungslos exponentiell vorangehen kann. Die Biomasse wird nach 1 Stunde bei 2 Gramm und nach 2 Stunden bei 4 Gramm gemessen.

   (a) Bestimmen Sie die Parameter des empirischen Modells: $m(t) = m_0 \exp[\lambda t]$.

   (b) Bestimmen Sie die Parameter des empirischen Modells: $m(t) = m_2 \exp_2[\lambda_2 t]$.

   (c) Zeigen Sie dass $m_0 \exp[\lambda t] = m_2 \exp_2[\lambda_2 t]$ gilt.

   (d) Nach wie vielen Stunden ist die Biomasse ein zehnfaches des anfänglichen Werts?

2. Die Innentemperatur in einem Haus ist $T(t)$ und die Aussentemperatur ist T_∞. Nachdem die Heizung ausgeschaltet wird, kann $T(t)$ durch das Newtonsche Kühlungsgesetz modelliert werden:

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp[-t/\tau]$$

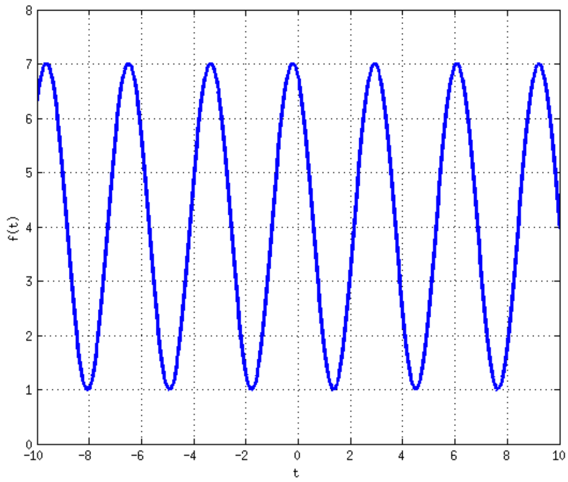
   wobei T_0 die anfängliche Innentemperatur ist und die Zeitskala τ von Eigenschaften des Hauses abhängt. Die Aussentemperatur $T_\infty = 0$C und die Innentemperaturen $T(\ln(2)$ Stunden$) = 11$C und $T(\ln(4)$ Stunden$) = 5.5$C sind gemessen worden. Sagen Sie voraus, wie lang es dauern wird, bis die Innentemperatur zu 90% der Differenz zwischen der Anfangstemperatur und der Aussentemperatur sinkt.

3. Die Bevölkerung der USA ist bis zum Jahr 1900 ungefähr exponentiell gewachsen. Seitdem ist der Zuwachs relativ flacher geworden, und dies kann vielleicht wie folgt erklärt werden. Im ungeheuer großen Lebensraum der USA entwickelt sich die Population zunächst ungehemmt, je größer die Population, desto mehr Nachkommen. Mit immer dichterer Bevölkerung werden aber Mechanismen wirksam, die das Wachstum einbremsen, geringere Kinderfreudigkeit und/oder erhöhte Sterblichkeit bewirken. Ein empirisches Modell für diese Effekte ist durch die logistische Funktion gegeben:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \exp[-(t - t_0)/\tau]}$$

   Folgende Bevölkerungsdaten (in Einheiten zu hundert-millionen Einwohnern) sind gemessen worden: $P(0$ Jahr$) = 1$, $P(\ln(2)$ Jahr$) = 4/3$ und $P(\ln(4)$ Jahr$) = 8/5$, wobei $t = 0$ dem Jahr 1900 entspricht. Bestimmen Sie die Parameter K (Kapazität), t_0 (Wendezeit) und τ (Zeitskala) im logistischen Modell.

4. Die Versetzung einer federgeladenen Masse wird im Lauf der Zeit gemessen, und diese Daten werden so grafisch dargestellt:



Ein empirisches Modell für diese wellenförmige Versetzung ist durch

$$f(t) = c + a\sin[\omega(t-\tau)]$$

gegeben. Anhand der Grafik bestimmen Sie die Parameter c, a, ω, τ im empirischen Modell.

Für die letzten zwei Beispiele sei $k(t)$ die Konzentration einer Substanz X die nach folgender Reaktion $m$ter Ordnung zerfällt: $mX \to X_m$. Ein empirisches Modell für die Konzentration ist gegeben durch:

$$k(t) = (at+b)^{-\frac{1}{m-1}} \quad (m > 1)$$

Für den Zerfall erster Ordnung $X \to \tilde{X}$ gibt es das folgende empirische Modell:

$$k(t) = a\exp[-bt] \quad (m = 1)$$

5. Für eine bekannte Reaktion zweiter Ordnung sind die Konzentrationen $k(1 \text{ Sek}) = 5/2$ (Mol/Liter) and $k(2 \text{ Sek}) = 5/3$ (Mol/Liter) gemessen worden. Bestimmen Sie die Parameter a und b im entsprechenden empirischen Modell.

6. Die folgenden Konzentrationen (in Mol/Liter) für eine Reaktion unbekannter Ordnung sind gemessen worden:

t	$k(t)$
0	0.0190
15	0.0130
30	0.0091
45	0.0069
60	0.0057
75	0.0052
90	0.0043
105	0.0039
120	0.0035

Bestimmen Sie die Ordnung der Reaktion. Hinweis: Transformieren Sie die Daten, d.h. durch $\log k(t)$ oder $1/k(t)^{m-1}$, so dass die transformierten Daten einen linearen Zusammenhang wiederspiegeln.