8. Proseminar Höhere Mathematik I

Aufgaben für den 27.11.2012

1. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:
$$2^n, \quad \frac{(-1)^n}{n}, \quad \frac{n-1}{n}, \quad \frac{2^n}{4^n+1}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$
2. Gibt es eine konvergente Folge (x_n), die alle ganzen Zahlen als Werte annimmt?
3. Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen an: (a) $1+\sqrt{x-3}=3$, (b) $3+\sqrt{x-2}=2$, (c) $x=\sqrt{x+6}$, (d) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-1}$.
4. Zeigen Sie, dass für $ab>0$ gilt: $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}$.

Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur

1. Berechnen Sie
$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^2}.$$
Existieren $\lim_{x\to 0} 1/x$ bzw. $\lim_{x\to 0} 1/x^2$?
2. Berechnen Sie
$$\lim_{x\to\infty} -\frac{x^3}{|x|}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(x-\lfloor x\rfloor).$$
3. Kann $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ stetig in 0 fortgesetzt werden?
$$\text{(a) } f(x)=\frac{x}{|x|}, \qquad \text{(b) } f(x)=\frac{x^2}{|x|}.$$
4. Finden Sie eine Bijektion $\phi\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ und bestimmen Sie das Bild von $\{-2,-4,-6,\dots\}$ unter ϕ.
5. Lösen Sie die Ungleichung in $\mathbb{R}$ mittels Fallunterscheidung und fertigen Sie als Probe eine Skizze an:
$$|x+1|>|2x-1|-4.$$
6. Sei $g(x)=\sqrt{x^2-2x}$ und $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
   (a) Bestimmen Sie jeweils die maximalen Definitionsbereiche D_f und D_g von f und g in $\mathbb{R}$. Als Wertebereich wählen Sie $\mathbb{R}$.
   (b) Bestimmen Sie das Bild von f, also die Menge $f(D_f)$.
   (c) Bestimmen Sie ohne Verwendung von Hilfsmitteln der Differentialrechnung die Teilmengen von D_g in denen g monoton wächst oder fällt.
   (d) Bestimmen Sie die Komposition $f\circ g$ und geben Sie ihren Definitionsbereich an.
7. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x):=\lfloor x\rfloor$ ist stetig an der Stelle (a) $x_0=3$, (b) $x_0=3/10$.
8. Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x)=x^2+5$. Beweisen Sie mittels eines ε,δ-Beweises, dass f stetig ist an der Stelle $x_0=-2$.