PS Höhere Mathematik I. WS 2012/13.
7. Übungsblatt. 20.11.2012

1. *Stetige Ergänzung*

   Die Funktion
   $$f(x) := \frac{x^3 + x^2}{x^3 + x^2 + x + 1}$$
   hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine Definitionslücke. Lässt sich $f(-1)$ so definieren, dass die Funktion stetig fortsetzbar ist?

2. *Bisektionsverfahren*

   Sei $f\colon [2,3] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 - 5$. Besitzt f eine Nullstelle x^* in $[2,3]$? Berechnen Sie eine Approximation $\tilde{x}$ von x^* mithilfe des Bisektionsverfahrens, sodass $|x^* - \tilde{x}| < 0.1$.

3. *Zwischenwertsatz*

   Besitzt $\cos(x) = x$ eine Lösung in dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? Hinweis: $\cos(x)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

4. *Satz von Weierstraß*

   Sei $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 3x^2 + x + 3$. Untersuchen Sie die Monotonie von f und bestimmen Sie alle Extremwerte.

5. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ der nachstehenden Folgen und beweisen Sie, dass es sich dabei um die Grenzwerte handelt indem Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ finden, sodass die Differenz von a_n und dem Grenzwert betragsmäßig kleiner ist als ε, wenn $n > N_\varepsilon$.

   (a) $a_n = \frac{1}{4n}$, $n \in \mathbb{N}$

   (b) $a_n = \frac{6n-2}{4n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

   (c) $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$

Freiwillige Trainigsbeispiele

6. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion
   $$f(x) := \begin{cases} 1 + x^2 & x \leq 1 \\ ax - x^3 & 1 < x \leq 2 \\ bx^2 & \text{sonst} \end{cases}$$
   auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?