PS Höhere Mathematik I. WS 2012/13.
6. Übungsblatt. 13.11.2012

1. Berechnen Sie gegebenenfalls folgende Grenzwerte und begründen sie Ihre Rechnung.

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3}{-x^2+5x+1}$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^2+1}{x^3+x^2+2}$

   (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^3+x-1}$

2. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x^3+3x^2-4}{x^3-x^2-4x+4}$ an. Berechnen sie weiter folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 2^-} f(x), \quad \lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

3. Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, gelte $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$ in einem Häufungspunkt x_0 von D. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1-2f(x)-3f(x)^2}{1+f(x)^4}$$

   und begründen sie Ihre Rechnung.

4. Die Konzentration eines Stoffes verhält sich in der Zeit entsprechend der Funktion $c(t) := \frac{2t+1}{t+1}$ (t in Stunden). Berechnen Sie die Gleichgewichtskonzentration $c^* := \lim_{t\to\infty} c(t)$. Nach wie vielen Stunden bleibt die Abweichung der Konzentration des Stoffes kleiner als 1% von c^*. (Tipp: Ist c monoton?)

5. (a) Erklären Sie an Hand einer Skizze die ε-δ-Definition der Stetigkeit.

   (b) Zeigen Sie durch Rückgriff auf die ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

   (c) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist. ($\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen. Tipp: Verwenden Sie, dass es zu jedem $\delta > 0$ sowohl eine rationale Zahl x_1 als auch eine irrationale Zahl x_2 mit $|x_i - x_0| < \delta$, $i = 1, 2$ gibt.)

6. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + 3x - 1 & x \leq -1 \\ 3x^3 + 2x^2 - a & x > -1 \end{cases}$$

   an der Stelle $x_0 = -1$ stetig.