

5. Proseminar Höhere Mathematik I

Aufgaben für den 6.11.2012

1. Grenzwerte von Funktionen

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 + 7x - 12, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 5}{x^3 - 2x}.$$

2. Einseitige Grenzwerte

Gegeben sei die Funktion $\lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. Bestimmen Sie direkt mit Hilfe der ε - δ -Definition die folgenden einseitigen Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \lfloor x \rfloor, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \lfloor x \rfloor, \quad (c) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \lfloor x \rfloor, \quad (d) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \lfloor x \rfloor.$$

Existiert der Grenzwert in 1? Existiert der Grenzwert in $\frac{1}{2}$?

3. Der Sandwich-Satz

Gegeben sei wieder die Funktion $\gamma(x) := x - \lfloor x \rfloor$. Verwenden Sie den Sandwich-Satz, um den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} x\gamma\left(\frac{1}{x}\right)$$

zu bestimmen.

4. Häufungspunkte einer Menge

Zeigen Sie, dass -1 und 1 Häufungspunkte der Menge $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ sind.

Freiwillige Trainingsbeispiele

5. Noch mehr Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}.$$

6. Noch mehr einseitige Grenzwerte

Bestimmen Sie direkt mit Hilfe der ε - δ -Definition die folgenden einseitigen Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$