

PS Höhere Mathematik I. WS 2012/13.
3. Übungsblatt. 23.10.2012

Verwenden Sie in den folgenden Beispielen Ihr Schulwissen über elementare Funktionen.

1. Gibt es eine bijektive Abbildung:

- (a) der ungeraden natürlichen Zahlen auf die natürlichen Zahlen \mathbb{N} ?
- (b) des Intervalles $(0, 1)$ auf das Intervall (a, b) , wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$?
- (c) des Intervalles $(0, 1)$ auf das unendliche Intervall $(0, \infty)$?

Wenn ja, geben Sie eine solche an.

2. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie an Hand des Graphen Teilmengen des Definitionsbereichs, in denen die Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind:

- (a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = |x + \frac{1}{2}| + \frac{3}{4}$
- (b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, wobei $f(x) = x^2 + x + 1$. Hinweis: verwenden Sie die quadratische Ergänzung für $f(x)$
- (c) $f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$

3. Untersuchen Sie an Hand einer Skizze, ob die Funktion $f(x) = \sin(x)$ surjektiv, injektiv oder bijektiv ist:

- (a) $f : (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}$
- (b) $f : [0, 2\pi] \mapsto [-1, 1]$
- (c) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \mapsto \mathbb{R}$
- (d) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \mapsto [0, 1]$
- (e) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \mapsto (0, 1)$
- (f) $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \mapsto (-1, 1)$

4. Gegeben seien die Formeln $f(x) = 1 + \sqrt{2-x}$ und $g(x) = 1 + \sqrt{x^2-4}$.

- (a) Definieren Sie vollständige Funktionen f und g , jeweils mit einem maximalen Definitionsbereich und mit einem Wertevorrat gegeben durch das Bild. Sind f und g injektiv? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.
- (b) Welche Änderungen ergeben sich, wenn g so umdefiniert wird: $g : (-\infty, -2] \mapsto \text{Bild}(g)$?

5. Wie müssen die Definitionsbereiche der Funktionen minimal abgeändert (eingeschränkt) werden, dass die entsprechenden Kompositionen definiert sind? Berechnen Sie die Kompositionen zu diesen eingeschränkten Definitionsbereichen:

- (a) $f \circ f$, wobei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$
- (b) $f \circ f^{-1}$, wobei $f : [-1, 1] \mapsto [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
- (c) $f \circ g$ und $g \circ f$, wobei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = 3-x$ und $g : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x)$

6. Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich D , das Bild $f(D)$ und gegebenenfalls die Umkehrfunktion f^{-1} für folgende Funktionen:

- (a) $f : x \mapsto \frac{3x+2}{4-3x}$
- (b) $f : x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$