2. Proseminar Höhere Mathematik I

Aufgaben für den 16.10.2012

Für dieses Blatt darf zitiert werden: $\sqrt{X^2} = |X|$, $\forall X \in \mathbb{R}$; $\sqrt{X}$, $X \in [0, \infty)$ ist monoton steigend; X^2, $X \in (-\infty, 0]$ ist monoton fallend; X^2, $X \in [0, +\infty)$ ist monoton steigend.

1. Skizzieren Sie Kurven für die Funktionen mit den angegebenen Definitionsbereichen:

   (a) $f(x) = x^3$, $x \in [-2, 2]$

   (b) $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 2]$

   (c) $h(x) = |x|$, $x \in [-3, 3]$

   (d) $p(x) = 2 + (x+1)^3$, $x \in [-3, 1]$

   (e) $q(x) = 1 + \sqrt{1-x}$, $x \in [-1, 1]$

   (f) $r(x) = 2 - 3|1-x|$, $x \in [0, 2]$

   wobei jede mit dem Wertevorrat $\mathbb{R}$ definiert sei.

2. Verifizieren Sie die Ungleichungen. (Hinweis: Man quadriert beide Seiten einer Ungleichung und argumentiert Äquivalenz jeder hergeleiteten Ungleichung.)

   (a) Die arithmetische-geometrische Mittelungleichung:
   $$\sqrt{ab} \leq \tfrac{1}{2}(a+b), \quad \forall a, b \geq 0$$

   (b) Die Dreiecksungleichung:
   $$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

3. Bestimmen Sie für jede der folgenden Ungleichungen die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ die diese erfüllen:

   (a) $x(2-x) \leq 0$

   (b) $|x+3| \geq 2$

   (c) $x(2-x) \leq 1$

   (d) $x^3 - x < 0$

4. Lösen Sie die Ungleichungen:

   (a) $\dfrac{x}{4-x} > 4$

   (b) $\dfrac{1}{3} < \dfrac{2x-1}{3-2x} < \dfrac{1}{2}$

5. Gegeben seien die Formeln $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ und $g(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Geben Sie maximale Definitionsbereiche aus $\mathbb{R}$ für f und g an.

   (b) Stellen Sie $f(x)$ und $g(x)$ auf ihren Definitionsbereichen grafisch dar.

   (c) Bestimmen Sie die Bilder $\mathcal{B}(f)$ und $\mathcal{B}(g)$ und beweisen Sie Ihre Antwort. Seien die Funktionen durch $\mathcal{W}(f) = \mathcal{B}(f)$ und $\mathcal{W}(g) = \mathcal{B}(g)$ vollständig definiert.

   (d) Welche dieser Funktionen ist injektiv, surjektiv oder bijektiv?

6. Quadratische Ergänzung.

   (a) Für gegebene $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ in der Gleichung:
   $$ax^2 + bx + c = \alpha(x-\beta)^2 + \gamma$$
   Dieses Umformen heißt *quadratische Ergänzung*.

   (b) Gegeben sei die Funktion $q(x) = x^2 + x + 1$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

      i. Berechnen Sie die quadratische Ergänzung für $q(x)$.

      ii. Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den q annimmt.

      iii. Bestimmen Sie die Intervalle in denen $q(x)$ monoton fallend oder monoton steigend ist.