1. Proseminar Höhere Mathematik I

Aufgaben für den 9.10.2012

1. Gegeben seien folgende Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bzw. der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ungerade}\},\\ B &= \{n \in \mathbb{N} : n \leq 21 \text{ und } n \text{ Primzahl}\},\\ C &= \{1, 2, 8\},\\ D &= \{2n - 3 : n \in \mathbb{N}\},\\ E &= \{-x : x \in D\}. \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie folgende Mengen:

$$A \cap B, \quad (A \cap C) \cup B, \quad (A \cap B) \times C, \quad B \setminus A, \quad (A \cup B) \setminus B,$$
$$(A \cup A) \setminus (A \setminus (A \cap A)), \quad (A \setminus D) \times (D \setminus A).$$

   (b) Beschreiben Sie A mittels C, D und E.

   (c) Bestimmen Sie die Potenzmenge von C. (Das ist die Menge aller Teilmengen von C.)

2. Es sei $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, 1\}$, $3 = \{\emptyset, 2\}$, $4 = \{\emptyset, 3\}$ und

$$A = \big\{1, 2, 3, 4, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, \{1\}\}\big\}.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$$1 \in A, \quad \{1\} \in A, \quad \{1\} \subset A, \quad \{2\} \subset A, \quad \{\{2\}\} \subset A, \quad \{2, 3\} \subset A, \quad \{1, 2, \{1\}\} \subset A,$$
$$2 \subset A, \quad \{2, 1, \{1\}\} \in A, \quad \{3, 4\} \in A, \quad \emptyset \in A.$$

3. Geben Sie jeweils drei Mengen A, B, C und E, F, G an für die gilt:

$$(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C), \qquad (E \cap F) \cup G = E \cap (F \cup G).$$

4. Gegeben seien die beiden Dreiecke

$$\begin{aligned} D_1 &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\big\},\\ D_2 &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 2\big\}. \end{aligned}$$

   Geben Sie rechnerisch die Schnittmenge $D_1 \cap D_2$ an, und skizzieren Sie diese.

5. Berechnen Sie Realteil $\Re$ bzw. Imaginärteil $\Im$:

$$\Re\frac{1}{-2+3i}, \qquad \Im\frac{1-i}{2+5i}, \qquad \Re\left(3(2+i)^2 - 3i\right), \qquad \Im\frac{2+i}{3-4i}.$$

6. Skizzieren Sie folgende Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene, wobei $\Re(z)$ der Realteil von z ist:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = z\}, & B &= \{z \in \mathbb{C} : |-z - i - 2| \leq 3\},\\ C &= \{z \in \mathbb{C} : -2 \leq \Re z < 1, |\Im z| < 2\}, & D &= \{z \in \mathbb{C} : \Re((2+3i)(z-i)) = 0\}. \end{aligned}$$