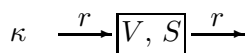


**Übungen für Grundlagen Physikalischer Prozesse und
Mathematik für Physik und Technik
Wintersemester 2007/08**

1. Durch einen gewissen See mit einem konstanten Volumen V strömt ein Fluss ab und zu mit der selben Zufluss- und Abflussrate r .



Größe	Einheit	Größe	Einheit
V	m^3	κ	kg/m^3
t	s	S	kg/m^3
r	m^3/s	S'	$\text{kg}/[\text{s} \cdot \text{m}^3]$

Im Zufluss gibt es einen Schadstoff mit der konstanten Konzentration κ . Angenommen ist der Schadstoff im See zu jeder Zeit t gleichmässig verteilt, d.h. die Konzentration $S(t)$ ist ortsunabhängig. In der Zeit $t = t_0$ gibt es keinen Schadstoff im See. Zeige mit einer Mengengleichung, dass der Schadstofftransport wie folgt modelliert werden kann:

$$\begin{cases} VS'(t) = r\kappa - rS(t), & t > t_0 \\ S(t_0) = 0 \end{cases}$$

Löse das obige Anfangswertproblem für die Schadstoffkonzentration.

2. Eine Wärmepumpe pumpt Flüssigkeit zuverlässig mit der konstanten Temperatur T_P aus. Diese Flüssigkeit strömt in eine in der Erde verlegte Leitung mit dem Fluss F . Angenommen haben die Leitungsflüssigkeit und die Erde in ihrer Nähe ortsunabhängige Temperaturen T_L bzw. T_E . Die Energie E_i des i ten Kompartiments ($i = L$ oder E) ist durch $E_i = \rho_i c_i V_i T_i$ gegeben, wobei ρ_i die Dichte, c_i die Wärmekapazität und V_i das Volumen des i ten Kompartiments sind. Nach dem Newtonschen Kühlungsgesetz hängt die Diffusion zwischen den Kompartimenten von dem Grenzflächeninhalt S und dem Wärmetauskoeffizient h des Leitungsschlauches ab.

Größe	Einheit	Größe	Einheit
T	$^\circ\text{K}$	ρ	kg/m^3
T'	$^\circ\text{K}/\text{s}$	c	$\text{J}/[\text{kg} \cdot ^\circ\text{K}]$
F	m^3/s	V	m^3
E	J	h	$\text{J}/[\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}]$
E'	J/s	S	m^2

Zeige mit einer Energiebilanz, dass die Änderung dieser Temperaturen wie folgt modelliert werden kann:

$$\begin{aligned} \rho_L c_L V_L T'_L &= hS(T_E - T_L) + \rho_L c_L F(T_P - T_L) \\ \rho_E c_E V_E T'_E &= hS(T_L - T_E). \end{aligned}$$

Für den Fall dass der Fluss extrem groß wird ($F \rightarrow \infty$), und deswegen bleibt die Leitungstemperatur bei der Pumpentemperatur ($T_L \rightarrow T_P$), berechne die Funktion $T_E(t)$ und die gewonnene Wärme $E_E(0) - E_E(t) = \rho_E c_E V_E (T_E(0) - T_E(t))$, wenn der Anfangswert $T_E(0) = T_0 > T_P$ ist. Finde die Zeitdauer, in der die Erdeenergie zu 90% des Unterschieds zwischen ihrem Anfangswert und ihrem Gleichgewichtswert sinkt.

3. Für ein Erdwärmesystem sind 3 Kreise jeweils mit den Längen 180m, 200m und 220m verlegt worden, obwohl $6 \times 100\text{m}$ vorgeschrieben worden sind. Angenommen ist der Wärmepumpendruck fixiert. Sei \tilde{F}_3 der Gesamtfluss für das verlegte Kollektorensystem und sei F_6 der Gesamtfluss für das vorgeschriebene Kollektorensystem. Berechne \tilde{F}_3/F_6 . Nachdem die 2 kürzeren Kreise mit zusätzlichen Widerständen (Verengungen) reguliert worden sind, so dass die Entleerungszeiten (und Endtemperaturen) aller Kreise gleich sind, ergibt sich ein neuer Fluss \hat{F}_3 . Berechne \hat{F}_3/F_6 .

4. Anhand eines Beispiels verdeutliche die Schritte des Modellierungszyklus.
5. Schreibe das obige Modell,

$$\begin{cases} \rho_E c_E V_E T_E'(t) = hS(T_P - T_E(t)), & 0 \leq t \leq t^* \\ T_E(0) = T_0 \end{cases}$$

in dimensionslose Form um, und identifiziere zwei dimensionslosen Parameter, die das Verhalten des Systems bestimmen, d.h. die Parameter ρ_E , c_E , V_E , h , S und T_P könnten verschieden für verschiedene Konfiguration sein, aber wenn die zwei dimensionslosen Parameter für solche Konfigurationen gleich sind, ist die Lösung des dimensionslosen Problems für diese Konfigurationen gleich.

6. Gegeben sind Daten $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^N$, wobei die Messpunkte verschieden sind $x_i \neq x_j$, und die Parameter k und d des empirischen Modells $y(x) = k \cdot x + d$ sollen so bestimmt werden, dass die Summe der quadratischen Abstände zwischen der Gerade und den Daten,

$$E(k, d) = \sum_{n=1}^N [(k \cdot x_n + d) - y_n]^2$$

minimiert wird. Zeige durch die Optimalitätsbedingungen

$$\frac{\partial E}{\partial k}(k^*, d^*) = \frac{\partial E}{\partial d}(k^*, d^*) = 0$$

dass die minimierenden Parameter durch

$$k^* = \frac{\bar{x}y - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}, \quad d^* = k^* \cdot \bar{y} - \bar{x}$$

gegeben werden. Zeige dass die Hessische Matrix $D^2E(k^*, d^*)$ positiv definit ist, und deswegen hat E ein Minimum in (k^*, d^*) .

7. Gegeben sind Grundeinheiten $\{g_i\}_{i=1}^r$ und r abgeleitete Größen $\{G_j\}_{j=1}^r$ mit Einheiten

$$[G_j] = \prod_{i=1}^r g_i^{\alpha_{ij}}.$$

Zeige dass die Vektoren $\alpha_j = \{\alpha_{ij} : 1 \leq i \leq r\}$ linear unabhängig sind, genau dann wenn:

$$\prod_{j=1}^r [G_j]^{\lambda_j} = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$

8. Durch Dimensionsanalyse entwickle ein Modell für die Beziehung zwischen der Frequenz des Flügelschlags eines Insekts und anderen relevanten Größen, wie z.B. Masse des Insekts und Flügelfläche. (Siehe Abschnitt 1.2.8 im Skriptum.) Im Lauf der Entwicklung bestätige die Bedingungen des Buckingham Pi Satzes. (Ein weiteres Beispiel findet man in Beispiel 5.5 auf Seite 53 in <http://www.uni-graz.at/georg.propst/SN1.pdf>.)
9. Zwei Massen m_1 und m_2 treffen einander im Weltraum ohne Schwerkraft. Vor der Kollision haben die Massen die Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 beziehungsweise \mathbf{v}_2 . Seien \tilde{m}_1 , \tilde{m}_2 , $\tilde{\mathbf{v}}_1$, $\tilde{\mathbf{v}}_2$ die entsprechenden Größen nach der Kollision. Unter der Annahme dass keine Masse in der Kollision getauscht wird, d.h. $\tilde{m}_1 = m_1$ und $\tilde{m}_2 = m_2$ gelten, und dass bezüglich eines Ursprungs im Schwerpunkt die Bewegungen in einer Dimension eingeschränkt sind, löse das folgende System:

$$\begin{array}{ll} \text{Massenerhaltung:} & m_1 + m_2 = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 \\ \text{Impulserhaltung:} & m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \tilde{m}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{m}_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 \\ \text{Energieerhaltung:} & \frac{1}{2} m_1 |\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\mathbf{v}_2|^2 = \frac{1}{2} \tilde{m}_1 |\tilde{\mathbf{v}}_1|^2 + \frac{1}{2} \tilde{m}_2 |\tilde{\mathbf{v}}_2|^2 \end{array}$$

zu finden:

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\mathbf{v}_1 + 2m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{2m_1\mathbf{v}_1 + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

10. Ein Feder-geladener Aufzug mit Masse m , Feder-Konstante k und (Bremsen-) Dämpfungsparameter c steht still an der Stelle $x = 0$ und $\dot{x} = 0$, wobei $x(t)$ die senkrechte Auslenkung von der Ruhelage in der Zeit t bezeichnet. Dann bekommt der Aufzug eine Störung in der Zeit $t = 0$ mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Die Bewegung des Aufzugs wird mit dem folgenden System zweiter Ordnung modelliert:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

Unter der Annahme dass das System *untergedämpft* ist ($c^2 < 4mk$), löse das Anfangswertproblem, um die Bewegung des Aufzugs vorauszusagen. Hinweise: Verwende den Probe-Ansatz, $x(t) = e^{\lambda t}$, bestimme die möglichen λ 's, und bilde lineare Kombinationen der Funktionen der Form $e^{\lambda t}$. (Wenn es nur ein solches λ gibt, ist der Probe-Ansatz $x(t) = t^p e^{\lambda t}$ für verschiedene p und λ .) Ein untergedämpfter Aufzug ($c^2 < 4mk$) ist unangenehm: $x(t) = e^{-\mu t}[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$, ($\lambda = -\mu \pm i\omega$). Ein kritisch gedämpfter Aufzug ($c^2 = 4mk$) ist knapp angenehm, und könnte leicht untergedämpft werden, wenn die Material-Eigenschaft c sich ändert: $x(t) = e^{-\mu t}[A + Bt]$. Ein übergedämpfter Aufzug ist am angenehmsten: $x(t) = Ae^{(-\mu-\nu)t} + Be^{(-\mu+\nu)t}$, ($\lambda = -\mu \pm \nu$).

11. Zwei Systeme erzeugen die folgenden Kraftfelder:

- (a) $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla P(\mathbf{x})$, $P(\mathbf{x}) = \omega|\mathbf{x}|^2$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$
 (b) $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A^T \neq A$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Für diese zwei Fälle berechne die vom System geleistete Arbeit zur Bewegung eines Körpers entlang eines Wegs $\gamma(t) = (1 - t^2)\mathbf{x}_0 + t^3\mathbf{x}_1$, $0 \leq t \leq 1$, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbf{R}^n$.

12. Finde Potenziale $P(\mathbf{x})$, die erfüllen:

- (a) $-\nabla P(\mathbf{x}) = Gmm_S \frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}|^3} + Gmm_P \frac{\mathbf{x}_P - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}|^3}$
 (b) $\nabla P(\mathbf{x}) = \mathbf{e} \sum_{i=1}^n x_i$, $\mathbf{e} = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle^T$.

13. Schreibe den Matlab Code `http://math.uni-graz.at/keeling/wtc.m` in excel um.

14. Mit $c = 0$ im obigen Anfangswertproblem,

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = 0 \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

definiere $y_1 = x$, $y_2 = x'$ und $\mathbf{y} = \langle y_1, y_2 \rangle^T$, und schreibe dieses Anfangswertproblem als ein System erster Ordnung um:

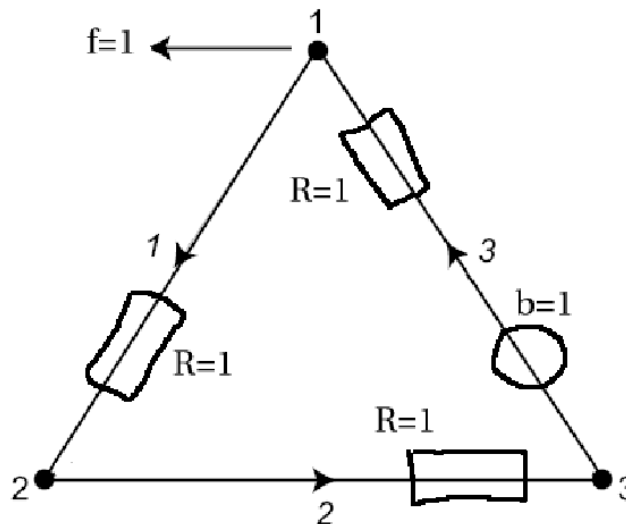
$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

Mit den Werten $m = 1$, $k = 1$, $x_0 = 1$ und $v_0 = 1$, berechne eine Lösung,

$$\mathbf{y}(t) = S \exp[\Lambda t] S^{-1} \mathbf{y}_0$$

wobei $A = SAS^{-1}$ und $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$.

15. In einer waagrechten Massen-Feder-Kette gibt es 2 Massen und 3 Feder, die Kette ist links und rechts befestigt, und es gibt keine äusseren Kräfte. Die Massen sind $m_i = 1$, die Federkonstanten sind $c_i = 1$ und die Anfangsbedingungen sind $x_1 = -1$, $x_2 = +1$, $x'_1 = +1$ und $x'_2 = -1$, wobei $x_i(t)$ die Position der i ten Masse bezüglich der Ruhelage bezeichnet. Gib die Lösung $\mathbf{x}(t) = \langle x_1(t), x_2(t) \rangle^T$ an.
16. Entwickle ein Modell der Bewegungen in der folgenden Massen-Feder-Kette. Diese Kette ist oben in einer Decke befestigt, hängt hinunter in Schwerkraft, und sie ist unten an keinem Boden befestigt. Es gibt n Massen $\{m_i\}_{i=1}^n$ und n Feder mit Federkonstanten $\{c_i\}_{i=1}^n$. Die äussere Kraft auf jeder Masse ist die Schwerkraft. Wenn die Kette waagrecht liegt, ist die Länge des i ten Feder-Masse-Elements $\hat{\ell}_i$. Wenn die Kette senkrecht steht und Bewegungen entstehen, ist die Länge des i ten Feder-Masse-Elements $\ell_i(t)$. Sei $x_i(t) = \ell_i(t) - \hat{\ell}_i$ die Position einer Masse bezüglich der Ruhelage ohne Schwerkraft. Verwende das Newtonsche Gesetz, um eine Differentialgleichung in $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle^T$ zu schreiben. Leite ein Gleichgewicht des Systems her.
17. Im folgenden Widerstandsnetzwerk seien alle Widerstände $R = 1$, die Stromquelle $f = 1$, und die Spannungsquelle $b = 1$.



Seien x_i , $i = 1, 2, 3$, die Potentialwerte der Knoten und y_i , $i = 1, 2, 3$, die Ströme in den Kanten. Nimm an, dass der 3. Knoten geerdet ist.

- Zeige, dass das Gleichgewicht dieses Widerstandsnetzwerkes durch $x_1 = x_2 = x_3 = 0 = y_1 = y_2$ und $y_3 = 1$ gegeben ist. Erkläre dieses Ergebnis physikalisch.
 - Das algebraische System, das x_i und y_i bestimmt, ist eine Stationaritätsbedingung für eine Lagrangesche Funktion mit Lagrangeschen Multiplikatoren x_i . Gib diese Lagrangesche Funktion an.
 - Diese Lagrangesche Funktion entspricht einem eingeschränkten Minimierungsproblem. Gib dieses Minimierungsproblem an.
18. Für das Aufzugssystem im 10. Beispiel schreibe die Differentialgleichung in erste Ordnung $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ um, und bestimme das Gleichgewicht und seine Stabilität für einen beliebigen Wert von c . Obwohl diese Matrix \mathbf{A} nicht symmetrisch ist, existiert eine Potentiallandschaft $P(\mathbf{y})$ mit der Eigenschaft $\mathbf{A}\mathbf{y} = -\mathbf{S}\mathbf{S}^T\nabla P(\mathbf{y})$, wobei $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{S}$ und $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i\}$ gelten. Für $m = 1$, $k = 1$ und $c > 2$ finde $P(\mathbf{y})$ und bestimme, ob P im Gleichgewicht des Aufzugsystems maximiert oder minimiert ist.
19. Für die folgenden Beispiele,

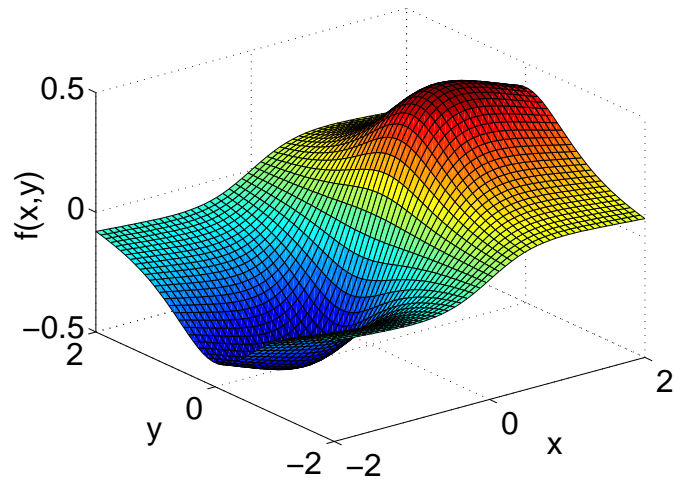
(a) $\min x^2 + y^2$ unter $x + y - 1 = 0$

(b) $\min x^2 + y^2 + z^2$ unter $x + y - 1 = 0$ und $x + z - 1 = 0$

bestätige die Bedingungen die garantieren, dass es einen eindeutigen stationären Punkt für die dazugehörige Lagrangiansche Funktion L gibt. Zeige dass die Eigenwerte von D^2L im stationären Punkt gemischte Vorzeichen haben, und deswegen ist der stationäre Punkt ein Sattelpunkt, d.h. in der Richtung des Eigenvektors eines negativen bzw. positiven Eigenwerts hat L ein Maximum bzw. Minimum.

20. Wir machen einen Spaziergang $x(t) = \frac{1}{2} \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, durch eine Gegend mit der Landschaft:

$$f(x, y) = \frac{x}{1+x^2} \frac{1}{1+y^2}$$



Finde den höchsten Punkt unseres Spaziergangs.

21. Gib 2 Beispiele von autonomen Differentialgleichungen $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit dazugehörigem Gleichgewicht \mathbf{x}^* an, in denen $\max\{\Re\lambda[\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}(\mathbf{x}^*)]\} = 0$ gilt, während das Gleichgewicht in einem Beispiel stabil ist und im anderen Beispiel instabil ist. Zeige die Stabilität dieser Gleichgewichte.
22. Skizziere die Richtungsfelder für die Beispiele:
- (a) $x' = x(x^2 - 1)$,
- (b) $x' = (r^2 - 1)x + y$, $y' = (r^2 - 1)y - x$ wobei $r^2 = x^2 + y^2$.

Ende der Übungsbeispiele für Mathematik in Physik und Technik

23. Finde die abgeschlossene Kurve mit einer gegebenen Länge, die den größten Flächeninhalt umfasst.
24. Mit dem Satz von Gauß,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS(\mathbf{x})$$

wobei $\partial\Omega$ und $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ausreichend glatt sind, und $\hat{\mathbf{n}}$ der am $\partial\Omega$ auswärts gerichtete Normalvektor ist, bestätige die Greenschen Formeln für ausreichend glatte Funktionen $u, v : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\int_{\Omega} v \nabla^2 u d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS(\mathbf{x})$$

$$\int_{\Omega} [u \nabla^2 v - v \nabla^2 u] d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} [u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}] dS(\mathbf{x})$$

25. Ein abgeschlossener Draht wird in eine Seife eingetaucht, und eine Seife-Fläche mit minimalem Flächeninhalt entsteht ohne Schwerkraft im inneren des Drahts. Angenommen kann diese Seife-Fläche mit einer Funktion $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$ mathematisch dargestellt werden, und der Draht kann mit $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ am $\partial\Omega$ dargestellt werden. Der Flächeninhalt ist durch $\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} d\mathbf{x}$ gegeben. Leite ein Randwertproblem her, das die Seife-Fläche mit minimalem Flächeninhalt bestimmt.

26. Für eine senkrechte Stange, die von einer Decke in einem Schwerkraftfeld hängt und am Boden befestigt ist, leite eine Wellengleichung für die rein längslaufenden Schwingungen her.
27. Für eine thermal isolierte und Wärmequellen enthaltende Stange, die dünn und bewegungslos mit konstanter Querschnittsfläche ist, leite eine Wärmeleitungsgleichung für die Temperatur in der Stange her.