Lösung des 14. und 15. Beispiels für das Proseminar aus Differentialgleichungen für LAK

Schreibe die Differentialgleichung:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} &= (p_m - p_b)\dfrac{A}{\nu\rho} - \dfrac{U^2}{2\nu A}, \quad t > 0 \\ U(0) &= 2\kappa\nu A \end{cases}$$

in folgender Form:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} &= a - bU^2, \quad t > 0 \\ U(0) &= \dfrac{\kappa}{b} \end{cases}$$

wobei:

$$a = (p_m - p_b)\frac{A}{\nu\rho}, \quad b = \frac{1}{2\nu A}, \quad \text{und} \quad \kappa = 1/\text{Sekunde}$$

Diese ist eine Riccatische Differentialgleichung mit bestimmter Lösung durch das Gleichgewicht gegeben:

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Die Lösung des ursprünglichen Problems ist

$$U(t) = \phi(t) + u(t)$$

wobei u erfüllt:

$$\begin{aligned} 0 = U' - a + bU^2 &= (\phi + u)' - a + b(\phi + u)^2 \\ &= u' - a + b(\phi^2 + 2\phi u + u^2) \\ &= u' - a + b(a/b + 2\sqrt{a/b}u + u^2) \\ &= u' + 2\sqrt{ab}u + bu^2. \end{aligned}$$

Diese ist eine Bernoullische Differentialgleichung. Mit der Transformation $z = u^{-1}$ bekommt man

$$0 = -u^{-2}u' - 2\sqrt{ab}(-u^{-1}) - b = z' - 2\sqrt{ab}z - b.$$

Mit dem Integrationsfaktor $e^{-2\sqrt{ab}t}$ bekommt man:

$$(ze^{-2\sqrt{ab}t})' = be^{-2\sqrt{ab}t}$$

Man integriert von $t = 0$ und erhällt:

$$\begin{aligned} z(t)e^{-2\sqrt{ab}t} - z(0) &= \\ \int_0^t (z(\tau)e^{-2\sqrt{ab}\tau})' d\tau &= b\int_0^t e^{-2\sqrt{ab}\tau} d\tau \\ &= \frac{b}{-2\sqrt{ab}} e^{-2\sqrt{ab}\tau}\Big|_0^t = \left[\frac{b}{-2\sqrt{ab}}\left(e^{-2\sqrt{ab}t} - 1\right)\right] \end{aligned}$$

oder:

$$z(t) = e^{2\sqrt{ab}t}z(0) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(e^{2\sqrt{ab}t} - 1\right) = \frac{1}{u(t)}$$

Aus der Bedingung $\kappa/b = U(0) = \phi(0) + u(0)$ erhällt man:

$$z(0) + 0 = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{\kappa/b - \sqrt{a/b}} \quad \text{oder} \quad z(0) = \frac{b}{\kappa - \sqrt{ab}}.$$

Also ist die Lösung:

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{e^{2\sqrt{ab}t}\dfrac{b}{\kappa-\sqrt{ab}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b}{a}}\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)} \cdot \frac{2(\kappa-\sqrt{ab})}{2(\kappa-\sqrt{ab})} \\
&= \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2(\kappa-\sqrt{ab})}{2be^{2\sqrt{ab}t} + \sqrt{b/a}\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)\left(\kappa-\sqrt{ab}\right)} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{b}}\left\{1 - \frac{2\sqrt{b/a}(\sqrt{ab}-\kappa)}{2be^{2\sqrt{ab}t} + \left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)\left(\kappa\sqrt{b/a}-b\right)}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{a}{b}}\left\{1 - \frac{2(b-\kappa\sqrt{b/a})}{2be^{2\sqrt{ab}t} - b\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right) + \kappa\sqrt{b/a}\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{a}{b}}\left\{1 - \frac{2(b-\kappa\sqrt{b/a})}{b\left(e^{2\sqrt{ab}t}+1\right) + \kappa\sqrt{b/a}\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)}\right\}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
U(0) = \sqrt{\frac{a}{b}}\left\{1 - \frac{2(b-\kappa\sqrt{b/a})}{b\,(1+1) + \kappa\sqrt{b/a}\,(1-1)}\right\} &= \sqrt{\frac{a}{b}}\left\{1 - \frac{2(b-\kappa\sqrt{b/a})}{2b+0}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{a}{b}}\left\{1 - (1 - \frac{\kappa}{\sqrt{ab}})\right\} = \frac{\kappa}{b}
\end{aligned}
$$

Die Lösung zur Bernoullischen Gleichung im 15. Beispiel,

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= -bU^2, \quad t > 0 \\
U(0) &= \frac{\kappa}{b}
\end{aligned}
\right.
$$

ist:

$$
U(t) = \frac{\kappa}{b(1+\kappa t)}.
$$

Zu zeigen ist, dass die Lösung zum 14. Beispiel zu der vom 15. Beispiel konvergiert im Limus $a \to 0$. Zu diesem Zweck schreibt man $U(t)$ in der folgenden Form:

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \sqrt{\frac{a}{b}}\left\{1 - \frac{2(b-\kappa\sqrt{b/a})}{b\left(e^{2\sqrt{ab}t}+1\right) + \kappa\sqrt{b/a}\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2(\kappa-\sqrt{ab})}{b\left(e^{2\sqrt{ab}t}+1\right) + 2\kappa bt\left[\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)/\left(2\sqrt{ab}t\right)\right]}
\end{aligned}
$$

Bemerke den folgenden Limus:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{a\to 0}\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)/\left(2\sqrt{ab}t\right) = 1
$$

Also gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to 0}\sqrt{\frac{a}{b}}\left\{1-\frac{2(b-\kappa\sqrt{b/a})}{b\left(e^{2\sqrt{ab}t}+1\right)+\kappa\sqrt{b/a}\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)}\right\} &= \\
\lim_{a\to 0}\left\{\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{2(\kappa-\sqrt{ab})}{b\left(e^{2\sqrt{ab}t}+1\right)+2\kappa bt\left[\left(e^{2\sqrt{ab}t}-1\right)/\left(2\sqrt{ab}t\right)\right]}\right\} &= 0+\frac{2(\kappa-0)}{b\,(1+1)+2\kappa bt\cdot 1} \\
&= \frac{\kappa}{b(1+\kappa t)}
\end{aligned}
$$