Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften
Lösungen der Beispiele des 14. Übungsblatts

1. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Interpolation

   (a) Anhand der Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^3$

$$(1.0, 1.0), \quad (2.0, 1.5) \quad \text{und} \quad (3.0, 1.8)$$

   ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & -r_1 \\ t_2 & 1 & -r_2 \\ t_3 & 1 & -r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.0 \\ 2 & 1 & -1.5 \\ 3 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} t_1 r_1 \\ t_2 r_2 \\ t_3 r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ 5.4 \end{bmatrix}$$

   (b) Der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   erfüllt

$$M\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.0 \\ 2 & 1 & -1.5 \\ 3 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, 1, -1.0) \cdot (3, 0, 2) \\ (2, 1, -1.5) \cdot (3, 0, 2) \\ (3, 1, -1.8) \cdot (3, 0, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ 5.4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

   Bonus: Das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 2 & 1 & -1.5 & 3.0 \\ 3 & 1 & -1.8 & 5.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \to \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \to \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & -2 & 1.2 & 2.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \tilde{\text{II}}: \\ \tilde{\text{III}} - 2 \cdot \tilde{\text{II}} \to \hat{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \end{array}\right]$$

   und rückwärts-Substitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \Rightarrow a_1 = 1 - (+1) \cdot a_2 - (-1) \cdot a_3 = 3 \\ \Rightarrow a_2 = (1.0 - (0.5) \cdot a_3)/(-1) = 0 \quad \uparrow \\ \Rightarrow a_3 = 0.4/0.2 = 2 \quad \uparrow \end{array}$$

   oder

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 2, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

```
M = {{1, 1, -1.0}, {2, 1, -1.5}, {3, 1, -1.8}}
b = {1.0, 3.0, 5.4}
a = Inverse[M].b
```

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

```
{3, 0, 2}
```

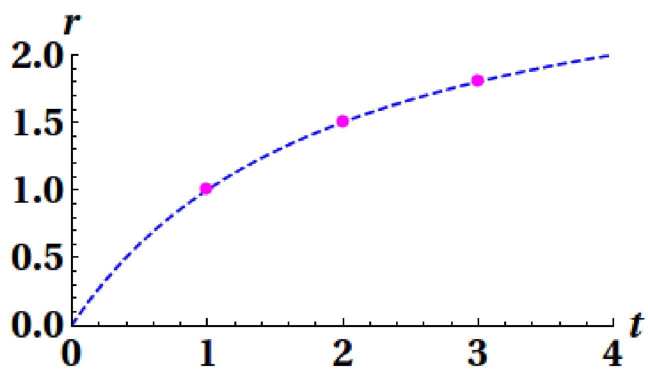
(c) Die rationale Funktion

$$r(t) = \frac{a_1 t + a_2}{t + a_3}, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 2$$

erfüllt

$$\begin{aligned} r(t_1) = r(1) &= \frac{a_1(1) + a_2}{(1) + a_3} = \frac{3(1) + 0}{(1) + 2} = 1.0 = r_1 \\ r(t_2) = r(2) &= \frac{a_1(2) + a_2}{(2) + a_3} = \frac{3(2) + 0}{(2) + 2} = 1.5 = r_2 \\ r(t_3) = r(3) &= \frac{a_1(3) + a_2}{(3) + a_3} = \frac{3(3) + 0}{(3) + 2} = 1.8 = r_3 \end{aligned}$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen $r(t_i) = r_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Grafisch dargestellt werden die rationale Funktion $r(t) = 3t/(t + 2)$ blau und die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^3$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



2. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Regression

(a) Anhand der Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^5$

$$(0.2, 0.3), \quad (0.4, 0.5), \quad (0.8, 0.9), \quad (1.6, 1.3) \quad \text{und} \quad (3.2, 1.8)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & -r_1 \\ t_2 & 1 & -r_2 \\ t_3 & 1 & -r_3 \\ t_4 & 1 & -r_4 \\ t_5 & 1 & -r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & -0.3 \\ 0.4 & 1 & -0.5 \\ 0.8 & 1 & -0.9 \\ 1.6 & 1 & -1.3 \\ 3.2 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1 t_1 \\ r_2 t_2 \\ r_3 t_3 \\ r_4 t_4 \\ r_5 t_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.2 \\ 0.72 \\ 2.08 \\ 5.76 \end{bmatrix}$$

und die Produkte

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 1.6 & 3.2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.3 & -0.5 & -0.9 & -1.3 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & -0.3 \\ 0.4 & 1 & -0.5 \\ 0.8 & 1 & -0.9 \\ 1.6 & 1 & -1.3 \\ 3.2 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.64 & 6.2 & -8.82 \\ 6.2 & 5.0 & -4.8 \\ -8.82 & -4.8 & 6.08 \end{bmatrix}$$

$$A^\top \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 1.6 & 3.2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.3 & -0.5 & -0.9 & -1.3 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.2 \\ 0.72 \\ 2.08 \\ 5.76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.428 \\ 8.82 \\ -13.838 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.821 \\ 0.03948 \\ 1.847 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$A^\top A\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 13.64 & 6.2 & -8.82 \\ 6.2 & 5.0 & -4.8 \\ -8.82 & -4.8 & 6.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.821 \\ 0.03948 \\ 1.847 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (13.64, 6.2, -8.82) \cdot (2.821, 0.03948, 1.847) \\ (6.2, 5.0, -4.8) \cdot (2.821, 0.03948, 1.847) \\ (-8.82, -4.8, 6.08) \cdot (2.821, 0.03948, 1.847) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.428 \\ 8.82 \\ -13.838 \end{bmatrix} = A^\top \boldsymbol{b}$$

Bonus: Das System $A^\top A\boldsymbol{a} = A^\top \boldsymbol{b}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 13.64 & 6.2 & -8.82 & 22.428 \\ 6.2 & 5.0 & -4.8 & 8.82 \\ -8.82 & -4.8 & 6.08 & -13.838 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II} - \frac{6.2}{13.64}\text{I} \to \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \frac{-8.82}{13.64} \cdot \text{I} \to \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 13.64 & 6.2 & -8.82 & 22.428 \\ 0 & 2.182 & -0.7909 & -1.3746 \\ 0 & -0.7909 & 0.3767 & 0.6646 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \frac{-0.7909}{2.182} \cdot \text{II} \to \hat{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 13.64 & 6.2 & -8.82 & 22.428 \\ 0 & 2.182 & -0.7909 & -1.3746 \\ 0 & 0 & 0.090067 & 0.16634 \end{array}\right]$$

und rückwärts-Substitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 13.64 & 6.2 & -8.82 & 22.428 \\ 0 & 2.182 & -0.7909 & -1.3746 \\ 0 & 0 & 0.090067 & 0.16634 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \Rightarrow a_1 = (22.428 - (-8.82)a_3 - (6.2)a_2)/13.64 = 2.82 \\ \Rightarrow a_2 = (-1.3746 - (-0.7909)a_3)/2.182 \overset{\uparrow}{=} 0.0395 \\ \Rightarrow a_3 = 0.16634/0.090067 = 1.847 \quad \uparrow \end{array}$$

oder

$$a_1 = 2.82, \quad a_2 = 0.0395, \quad a_3 = 1.847, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.82 \\ 0.0395 \\ 1.847 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

```
A = {{0.2,1,-0.3},{0.4,1,-0.5},{0.8,1,-0.9},{1.6,1,-1.3},{3.2,1,-1.8}}
b = {0.06,0.2,0.72,2.08,5.76}
a = Inverse[Transpose[A].A].(Transpose[A].b)
```

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

```
{2.82056, 0.0394805, 1.84684}
```

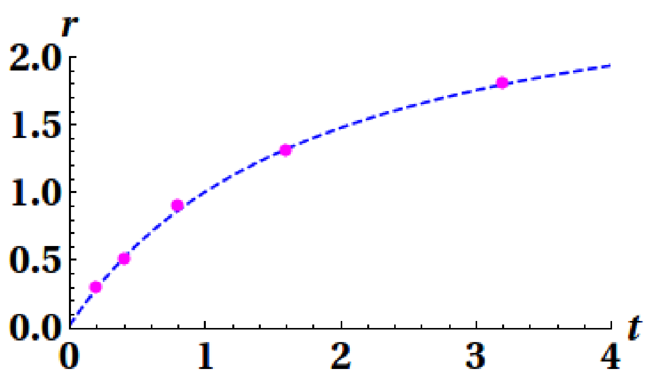
(c) Die rationale Funktion

$$r(t) = \frac{a_1 t + a_2}{t + a_3}, \quad a_1 = 2.82056, \quad a_2 = 0.0394805, \quad a_3 = 1.84684$$

erfüllt

$$\begin{aligned}
r(t_1) = r(0.2) &= \frac{a_1(0.2) + a_2}{(0.2) + a_3} = \frac{2.82056(0.2) + 0.0394805}{(0.2) + 1.84684} = 0.294889 \approx r_1 = 0.3 \\
r(t_2) = r(0.4) &= \frac{a_1(0.4) + a_2}{(0.4) + a_3} = \frac{2.82056(0.4) + 0.0394805}{(0.4) + 1.84684} = 0.519708 \approx r_2 = 0.5 \\
r(t_3) = r(0.8) &= \frac{a_1(0.8) + a_2}{(0.8) + a_3} = \frac{2.82056(0.8) + 0.0394805}{(0.8) + 1.84684} = 0.86742 \approx r_3 = 0.9 \\
r(t_4) = r(1.6) &= \frac{a_1(1.6) + a_2}{(1.6) + a_3} = \frac{2.82056(1.6) + 0.0394805}{(1.6) + 1.84684} = 1.32074 \approx r_4 = 1.3 \\
r(t_5) = r(3.2) &= \frac{a_1(3.2) + a_2}{(3.2) + a_3} = \frac{2.82056(3.2) + 0.0394805}{(3.2) + 1.84684} = 1.79622 \approx r_5 = 1.8
\end{aligned}$$

und daher sind die Differenzen $\{|r(t_i) - r_i|\}_{i=1}^5 = \{0.005, 0.02, 0.03, 0.02, 0.004\}$ alle klein. Grafisch dargestellt werden die rationale Funktion $r(t) = (a_1 t + a_2)/(t + a_3)$ blau und die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



3. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Interpolation

(a) Anhand der Daten

$$(0.0, 10.0), \quad (1.0, 5.50) \quad \text{und} \quad (2.0, 3.25)$$

der exponentiellen Funktion $T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t}$ folgt mit der Bedingung des ersten Datenpunkts

$$10 = T(0) = \alpha + \beta e^{0\nu} \quad \text{oder} \quad \beta = 10 - \alpha$$

und die Bedingungen der anderen Datenpunkte

$$5.50 = T(1) = \alpha + \beta e^{\nu} \quad \text{und} \quad 3.25 = T(2) = \alpha + \beta e^{2\nu}$$

lassen sich ohne β so umschreiben,

$$5.50 = \alpha + (10 - \alpha)e^{\nu} \quad \text{und} \quad 3.25 = \alpha + (10 - \alpha)e^{2\nu}$$

oder

$$5.50 - 10e^{\nu} = \alpha(1 - e^{\nu}) \quad \text{und} \quad 3.25 - 10e^{2\nu} = \alpha(1 - e^{2\nu})$$

(b) Die letzten 2 Gleichungen lassen sich folgendermaßen kombinieren,

$$\alpha = \frac{5.50 - 10e^{\nu}}{1 - e^{\nu}} = \frac{3.25 - 10e^{2\nu}}{1 - e^{2\nu}}$$

oder

$$\frac{20e^{\nu} - 11}{2(e^{\nu} - 1)} = \left(\frac{-2}{-2}\right) \cdot \frac{5.50 - 10e^{\nu}}{1 - e^{\nu}} = \frac{3.25 - 10e^{2\nu}}{1 - e^{2\nu}} \cdot \left(\frac{-4}{-4}\right) = \frac{40e^{2\nu} - 13}{4(e^{2\nu} - 1)}$$

Mit $x = e^{\nu}$ und daher $x^2 = e^{2\nu}$ folgt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} = \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)}$$

oder

$$0 = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} - \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)} = \frac{18x - 9}{4(x^2 - 1)}$$

(c) Aus der letzten Gleichung folgt die Lösung

$$x = 1/2 \quad \text{oder mit } e^{\nu} = x, \quad \nu = \ln(x) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2)$$

Aus der obigen Beziehung zwischen α und $x = 1/2$ folgt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} = 1$$

Aus der obigen Bedingung zwischen β und $\alpha = 1$ folgt

$$\beta = 10 - \alpha = 9$$

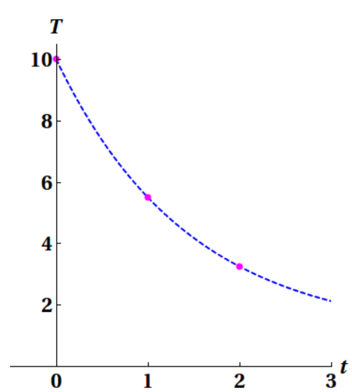
(d) Die exponentielle Funktion

$$T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t} = 1 + 9e^{-\ln(2)t} = 1 + 9e^{\ln(2^{-t})} = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$$

erfüllt

$$\begin{aligned} T(t_1) = T(0) &= 1 + 9 \cdot 2^{-0} &&= 10 &&= T_1 \\ T(t_2) = T(1) &= 1 + 9 \cdot 2^{-1} &&= 5.5 &&= T_2 \\ T(t_3) = T(2) &= 1 + 9 \cdot 2^{-2} &&= 3.25 &&= T_3 \end{aligned}$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen $T(t_i) = T_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Grafisch dargestellt werden die exponentielle Funktion $T(t) = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$ blau und die Daten $\{(t_i, T_i)\}_{i=1}^3$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



4. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Regression

(a) Die rohen und transformierten Daten sind

i	1	2	3	4	5
s_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
v_i	10.0	7.1	5.0	3.6	2.5
$x_i = s_i$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$y_i = \ln(v_i)$	2.30	1.96	1.61	1.28	0.916

(b) Wie auf dem 12. Übungsblatt gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(k,d) = \sum_{i=1}^{4} [(kx_i + d) - y_i]^2$$

global minimiert in

$$k^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad d^* = \overline{y} - k^* \overline{x}$$

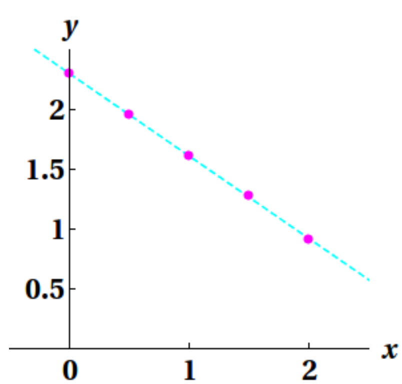
Anhand der (x,y)-Daten sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (0.0 + 0.5 + 1.0 + 1.5 + 2.0)/5 = 1.0 \\
\overline{y} &= (2.30 + 1.96 + 1.61 + 1.28 + 0.916)/5 = 1.614 \\
\overline{x^2} &= (0.0^2 + 0.5^2 + 1.0^2 + 1.5^2 + 2.0^2)/5 = 1.5 \\
\overline{xy} &= (0.0 \cdot 2.30 + 0.5 \cdot 1.96 + 1.0 \cdot 1.61 + 1.5 \cdot 1.28 + 2.0 \cdot 0.916)/5 = 1.269
\end{aligned}$$

und die für $E(k,d)$ minimierenden Parameter sind

$$k^* = \frac{1.269 - 1.0 \cdot 1.614}{1.5 - 1.0^2} = -0.69, \quad d^* = 1.615 - (-0.69) \cdot 1.0 = 2.3$$

Grafisch dargestellt werden die Gerade $y(x) = k^* x + d^*$ zyanfarbig und die (x,y)-Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.

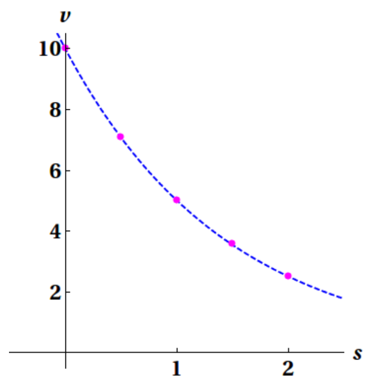


Die y-Werte der Daten und der abgeschätzen Gerade sind

i	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$y_i = \ln(v_i)$	2.30	1.96	1.61	1.28	0.916
$y(x_i)$	2.304	1.959	1.614	1.269	0.9235

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^5 = \{0.0016, 0.0011, 0.0044, 0.0122, 0.00723\}$ alle klein.

(c) Mit
$$\ln(v) = y = k^* x + d^* = k^* s + \ln(c^*), \quad c^* = e^{d^*} = 10.0$$
ergibt sich die Exponentialfunktion $v(s) = c^* e^{k^* s}$ durch die exponentielle Transformation
$$v = \exp(y) = \exp(k^* x + d^*) = e^{k^* s} e^{\ln(c^*)} = c^* e^{k^* s}, \quad c^* = 10.0, \quad k^* = -0.69$$
Grafisch dargestellt werden die Exponentialfunktion $v(s) = c^* e^{k^* s}$ blau und die (s, v)-Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



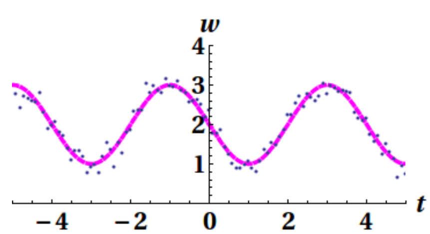
Die v-Werte der Daten und der abgeschätzen Exponentialfunktion sind

i	1	2	3	4	5
s_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
v_i	10.0	7.1	5.0	3.6	2.5
$v(s_i)$	10.0	7.0822	5.01576	3.55226	2.51579

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|v(s_i) - v_i|\}_{i=1}^5 = \{0.0, 0.018, 0.016, 0.048, 0.016\}$ alle klein.

5. Abschätzung von Winkelfunktionen

Um die Parameter $\{a, b, c, \omega\}$ der Winkelfunktion
$$w(t) = c + a \sin[2\pi\omega(t - b)]$$
von der grafisch dargestellten Daten zu bestimmen



merkt man zuerst, die Daten schwanken zwischen $w = 1$ und $w = 3$ mit Mittelwert $w = 2$. Daher folgen
$$\begin{aligned} c &= \text{Mittwert der } w\text{-Werte} = 2 \\ a &= \text{Abweichung der } w\text{-Werte von } c\text{, Amplitude } = 1 \end{aligned}$$

Weiters merkt man benachbarte Hügelgipfel bei $t = -1$ und $t = 3$. Daher ist die Periode gegeben durch $3 - (-1) = 4$, und

$$\begin{aligned} 1/\omega &= \text{Periode} = 4 \text{ oder} \\ \omega &= 1/4 \end{aligned}$$

Schließlich merkt man einen Wendepunkt z.B. bei $t = -2$ (auch bei $t = +2$), in dem die Daten steigend sind. Daher folgt

$$b = t\text{-Stelle bei einem steigenden Wendepunkt} = -2$$

Zusammengefasst ist die Abschätzung der Winkelfunktion gegeben durch

$$w(t) = 1 + \sin[2\pi(t + 2)/4]$$