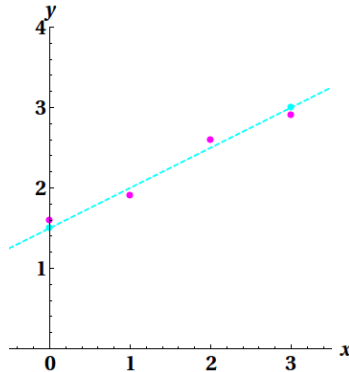


# Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

## Lösungen der Beispiele des 13. Übungsblatts

### 1. Abschätzung von Geraden

(a) Die magentafarbenen Punkte in der folgenden Grafik



stellen die Daten

$$(0, 1.6), \quad (1, 1.9), \quad (2, 2.6) \quad \text{und} \quad (3, 2.9)$$

in  $\mathbb{R}^2$  grafisch dar. Zwei weitere Punkte

$$P = (0, 1.5) \quad \text{und} \quad Q = (3, 3)$$

liegen ungefähr auf der gleichen Gerade wie die dargestellten Punkte. Diese Punkte  $P$  und  $Q$  sind zyanfarbig in der obigen Grafik. Die Gerade durch  $P$  und  $Q$  hat Steigung

$$\tilde{k} = \frac{3 - 1.5}{3 - 0} = 0.5.$$

Da der Punkt  $Q = (3, 3)$  in der Gerade liegt, lässt sich die Gerade mit der Formel  $(y - 3) = \tilde{k}(x - 3)$  oder  $y = 3 + (x - 3)/2$  darstellen. Daher mit

$$\tilde{d} = 1.5$$

ist die Gerade gegeben durch  $y(x) = \tilde{k}x + \tilde{d}$ . Diese Gerade ist zyanfarbig in der obigen Grafik. Die  $y$ -Werte der Daten und der abgeschätzten Gerade sind

$i$	1	2	3	4
$x_i$	0	1	2	3
$y_i$	1.6	1.9	2.6	2.9
$y(x_i)$	1.5	2.0	2.5	3.0

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen  $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$  alle klein.

(b) Wie auf dem 12. Übungsblatt gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^4 [(kx_i + d) - y_i]^2$$

global minimiert in

$$k^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad d^* = \bar{y} - k^* \bar{x}$$

Anhand der gegebenen Daten

$$(0, 1.6), \quad (1, 1.9), \quad (2, 2.6) \quad \text{und} \quad (3, 2.9)$$

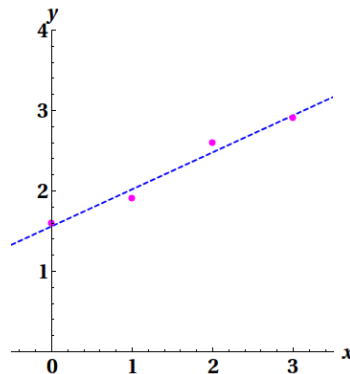
sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (0 + 1 + 2 + 3)/4 = 1.5 \\ \bar{y} &= (1.6 + 1.9 + 2.6 + 2.9)/4 = 2.25 \\ \overline{x^2} &= (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2)/4 = 3.5 \\ \overline{xy} &= (0 \cdot 1.6 + 1 \cdot 1.9 + 2 \cdot 2.6 + 3 \cdot 2.9)/4 = 3.95 \end{aligned}$$

und die für  $E(k, d)$  minimierenden Parameter sind

$$k^* = \frac{3.95 - 1.5 \cdot 2.25}{3.5 - 1.5^2} = 0.46, \quad d^* = 2.25 - 0.46 \cdot 1.5 = 1.56$$

Grafisch dargestellt werden die Gerade  $y = k^*x + d^*$  blau und die obigen Daten magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die  $y$ -Werte der Daten und der abgeschätzten Gerade sind

$i$	1	2	3	4
$x_i$	0	1	2	3
$y_i$	1.6	1.9	2.6	2.9
$y(x_i)$	1.56	2.02	2.48	2.94

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen  $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.04, 0.12, 0.12, 0.04\}$  alle klein.

- (c) Die Zielfunktion  $E(k, d)$  ausgewertet in  $(\tilde{k}, \tilde{d})$  und  $(k^*, d^*)$  ist

$$E(k^*, d^*) = 0.032 < 0.04 = E(\tilde{k}, \tilde{d})$$

Bemerkung: Die Zielfunktion

$$F(k, d) = \sum_{i=1}^4 |(kx_i + d) - y_i|$$

ist robuster gegenüber Ausreißer, d.h. die für  $F(k, d)$  minimierenden Parameter werden von einer starken Störung eines Datenpunkts nicht stark beeinflusst. Auf der anderen Seite ist  $F(k, d)$  schwieriger zu minimieren als  $E(k, d)$ .

## 2. Abschätzung von Potenzfunktionen

(a) Die rohen und transformierten Daten sind

$i$	1	2	3	4
$s_i$	1	4	9	16
$u_i$	0.4	1.1	1.4	2.1
$x_i = \ln(s_i)$	0.00	1.39	2.20	2.77
$y_i = \ln(u_i)$	-0.916	0.0953	0.336	0.742

(b) Wie auf dem 12. Übungsblatt gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^4 [(kx_i + d) - y_i]^2$$

global minimiert in

$$k^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad d^* = \bar{y} - k^* \bar{x}$$

Anhand der  $(x, y)$ -Daten sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\bar{x} = (0.00 + 1.39 + 2.20 + 2.77)/4 = 1.59$$

$$\bar{y} = (-0.916 + 0.0953 + 0.336 + 0.742)/4 = 0.0644$$

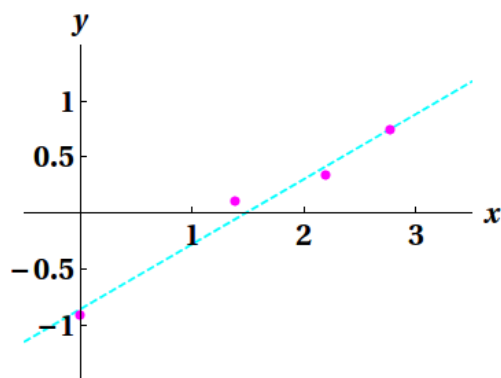
$$\overline{x^2} = (0.00^2 + 1.39^2 + 2.20^2 + 2.77^2)/4 = 3.61$$

$$\overline{xy} = (-0.00 \cdot 0.916 + 1.39 \cdot 0.0953 + 2.20 \cdot 0.336 + 2.77 \cdot 0.742)/4 = 0.732$$

und die für  $E(k, d)$  minimierenden Parameter sind

$$k^* = \frac{0.732 - 1.59 \cdot 0.0644}{3.61 - 1.59^2} = 0.581, \quad d^* = 0.0644 - 0.581 \cdot 1.59 = -0.859$$

Grafisch dargestellt werden die Gerade  $y(x) = k^*x + d^*$  zyanfarbig und die  $(x, y)$ -Daten  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$  magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die  $y$ -Werte der Daten und der abgeschätzten Gerade sind

$i$	1	2	3	4
$x_i$	0.00	1.39	2.20	2.77
$y_i$	-0.916	0.0953	0.336	0.742
$y(x_i)$	-0.859	-0.0534	0.418	0.752

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen  $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.06, 0.1, 0.08, 0.01\}$  alle klein.

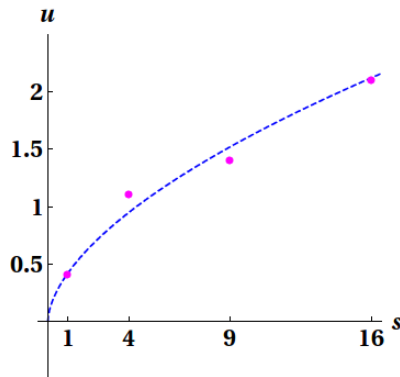
(c) Mit

$$\ln(u) = y = k^*x + d^* = k^*\ln(s) + \ln(c^*), \quad c^* = e^{d^*} = 0.424$$

ergibt sich die Potenzfunktion  $u(s) = c^*s^{k^*}$  durch die exponentielle Transformation

$$u = \exp(y) = \exp(k^*x + d^*) = e^{k^*\ln(s)}e^{\ln(c^*)} = c^*e^{\ln(s^{k^*})} = c^*s^{k^*}, \quad c^* = 0.424, \quad k^* = 0.581$$

Grafisch dargestellt werden die Potenzfunktion  $u(s) = c^*s^{k^*}$  blau und die  $(s, u)$ -Daten  $\{(s_i, u_i)\}_{i=1}^4$  magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die  $u$ -Werte der Daten und der abgeschätzten Potenzfunktion sind

$i$	1	2	3	4
$s_i$	1	4	9	16
$u_i$	0.4	1.1	1.4	2.1
$u(s_i)$	0.424	0.948774	1.51978	2.12305

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen  $\{|u(s_i) - u_i|\}_{i=1}^4 = \{0.024, 0.15, 0.12, 0.023\}$  alle klein.

### 3. Abschätzung von Polynomen durch Interpolation

(a) Anhand der Daten  $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^3$

$$(-1, 3), \quad (0, 1) \quad \text{und} \quad (1, 1)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$M\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1) \\ (1, 0, 0) \cdot (1, -1, 1) \\ (1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}$$

Bonus: Das System  $M\mathbf{a} = \mathbf{p}$  wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II} - \text{I} \rightarrow \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \text{I} \rightarrow \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \tilde{\text{II}}: \\ \tilde{\text{III}} - 2 \cdot \tilde{\text{II}} \rightarrow \hat{\text{III}}: \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

und rückwärts-Substitution gelöst:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 3 - (-1) \cdot a_1 - (+1) \cdot a_2 = 1 \\ \Rightarrow a_1 = -2 - (-1) \cdot a_2 = -1 \quad \uparrow \\ \Rightarrow a_2 = 2/2 = 1 \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \end{array}$$

oder

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

`M = {{1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}}`

`p = {3, 1, 1}`

`a = Inverse[M].p`

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

`{1, -1, 1}`

(c) Das Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1$$

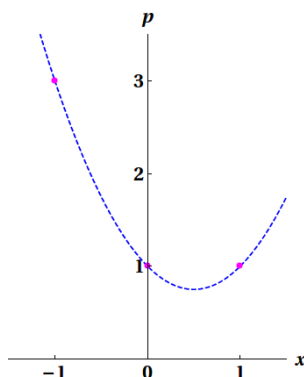
erfüllt

$$p(x_1) = p(-1) = a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 = 1 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 = 3 = p_1$$

$$p(x_2) = p(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 1 + 0 = 1 = p_2$$

$$p(x_3) = p(+1) = a_0 + a_1 \cdot (+1) + a_2 \cdot (+1)^2 = 1 - 1 \cdot (+1) + 1 \cdot (+1)^2 = 1 = p_3$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen  $p(x_i) = p_i, i = 1, 2, 3$ , erfüllt. Grafisch dargestellt werden das Polynom  $p(x) = 1 - x + x^2$  blau und die Daten  $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^3$  magentafarbig in der folgenden Grafik.



#### 4. Abschätzung von Polynomen durch Regression

(a) Anhand der Daten  $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^5$ ,

$$(-2.0, 6.9), \quad (-1.0, 3.1), \quad (0.0, 0.9), \quad (1.0, 1.1) \quad \text{und} \quad (2.0, 2.9)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \\ 1 & +2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.9 \\ 3.1 \\ 0.9 \\ 1.1 \\ 2.9 \end{bmatrix}$$

und die Produkte

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & +1 & +2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \\ 1 & +2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & +1 & +2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.9 \\ 3.1 \\ 0.9 \\ 1.1 \\ 2.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9 \\ -10.0 \\ 43.4 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$A^T A \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5, 0, 10) \cdot (1.04, -1.00, 0.971) \\ (0, 10, 0) \cdot (1.04, -1.00, 0.971) \\ (10, 0, 34) \cdot (1.04, -1.00, 0.971) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9 \\ -10.0 \\ 43.4 \end{bmatrix} = A^T \mathbf{p}$$

Bonus: Das System  $A^T A \mathbf{a} = A^T \mathbf{p}$  wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 10 & 0 & 34 & 43.4 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{I} \rightarrow \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.6 \end{array} \right]$$

und rückwärts-Substitution gelöst:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.6 \end{array} \right] \Rightarrow a_0 = (14.9 - (10) \cdot a_2)/5 = 1.04$$
$$\Rightarrow a_1 = -10.0/10 = -1.00$$
$$\Rightarrow a_2 = 13.6/14 = 0.971 \quad \uparrow$$

oder

$$a_0 = 1.04, \quad a_1 = -1.00, \quad a_2 = 0.971, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen:

A = {{1, -2, 4}, {1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}, {1, 2, 4}}

b = {6.9, 3.1, 0.9, 1.1, 2.9}

a = Inverse[Transpose[A] . A] . (Transpose[A] . b)

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

{1.03714, -1., 0.971429}

(c) Das Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad a_0 = 1.04, \quad a_1 = -1.00, \quad a_2 = 0.971$$

erfüllt

$$\begin{aligned} p(x_1) = p(-2) &= a_0 + a_1 \cdot (-2) + a_2 \cdot (-2)^2 \\ &= 1.04 - 1.00 \cdot (-2) + 0.971 \cdot (-2)^2 = 6.92 \approx p_1 = 6.9 \\ p(x_2) = p(-1) &= a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 \\ &= 1.04 - 1.00 \cdot (-1) + 0.971 \cdot (-1)^2 = 3.01 \approx p_2 = 3.1 \\ p(x_3) = p(0) &= a_0 + a_1 \cdot (0) + a_2 \cdot (0)^2 \\ &= 1.04 = 1.04 \approx p_3 = 0.9 \\ p(x_4) = p(+1) &= a_0 + a_1 \cdot (+1) + a_2 \cdot (+1)^2 \\ &= 1.04 - 1.00 \cdot (+1) + 0.971 \cdot (+1)^2 = 1.01 \approx p_4 = 1.1 \\ p(x_5) = p(+2) &= a_0 + a_1 \cdot (+2) + a_2 \cdot (+2)^2 \\ &= 1.04 - 1.00 \cdot (+2) + 0.971 \cdot (+2)^2 = 2.92 \approx p_5 = 2.9 \end{aligned}$$

und daher sind die Differenzen  $\{|p(x_i) - p_i|\}_{i=1}^5 = \{0.02, 0.09, 0.14, 0.09, 0.02\}$  alle klein. Grafisch dargestellt werden das Polynom  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  blau und die Daten  $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^5$  magentafarbig in der folgenden Grafik.

