

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

Lösungen der Beispiele des 8. Übungsblatts

1. Globale Extrema:

- (a) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

- i. bestimmt man die kritischen Punkte anhand der Ableitung (Seite 93 im Skriptum),

$$y_1'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x + 1)(x - 1)^2$$

durch

- A. $z \in D$, wobei $y'(x) = 0$, sind $z = -1, +1$,
- B. $c \in D$, wobei $y'(x)$ nicht existiert, sind keine und
- C. r am Rand von D sind $r = -2, +2$,

- ii. und wertet in diesen Stellen aus,

- A. $y_1(z)$ für jedes z sind $y_1(-1) = -11/12$, $y_1(+1) = 5/12$,
- B. $y_1(c)$ für jedes c sind keine und
- C. $y_1(r)$ für jedes r sind $y_1(-2) = 8/3$, $y_1(+2) = 4/3$.

- iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $y_1(-2) = 8/3$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $y_1(-1) = -11/12$.

- (b) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$y_2(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2) \quad \text{mit} \quad D = [-4, +4]$$

- i. bestimmt man die kritischen Punkte anhand der Ableitung (Seite 98 im Skriptum),

$$y_2'(x) = \frac{32(4 - x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8 + x^2)^2} = \frac{32}{3(8 + x^2)^2} \frac{(2 + x)(2 - x)}{\sqrt[3]{x}}$$

durch

- A. $z \in D$, wobei $y_2'(x) = 0$, sind $z = -2, +2$,
- B. $c \in D$, wobei $y'(x)$ nicht existiert, ist $c = 0$ und
- C. r am Rand von D sind $r = -4, +4$,

- ii. und wertet in diesen Stellen aus,

- A. $y_2(z)$ für jedes z sind $y_2(-2) = 2^{5/3}/3 = y_2(+2)$,
- B. $y_2(c)$ für jedes c ist $y_2(0) = 0$ und
- C. $y_2(r)$ für jedes r sind $y_2(-4) = 2^{4/3}/3 = y_2(+4)$.

- iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $y_2(-2) = y_2(+2) = 2^{5/3}/3$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $y_2(0) = 0$.

- (c) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$y_3(x) = \frac{\text{sign}(x)}{1 + |x|} \quad \text{mit } D = [-2, +2]$$

- i. bestimmt man die kritischen Punkte anhand der Ableitung (vgl. Beispiel 5c auf Übungsblatt 6),

$$y_3'(x) = \begin{cases} D_x \frac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ D_x \frac{1}{1+x}, & x < 0 \\ \text{nicht stetig} \Rightarrow \text{nicht} \\ \text{differenzierbar,} & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \frac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert} & \\ \text{nicht,} & x = 0 \end{cases} \quad \text{d.h. } y_3'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2}, \quad x \neq 0$$

durch

- A. $z \in D$, wobei $y_3'(z) = 0$, sind keine,
 B. $c \in D$, wobei $y_3'(c)$ nicht existiert, ist $c = 0$ und
 C. r am Rand von D sind $r = -1, +1$,

- ii. und wertet in diesen Stellen aus,

- A. $y_3(z)$ für jedes z sind keine,
 B. $y_3(c)$ ($\lim_{x \rightarrow c^\pm} y(x)$, y nicht stetig) für jedes c sind $y_3(0) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = +1 \quad \text{und}$$

- C. $y_3(r)$ für jedes r sind $y_3(-1) = -1/2$, $y_3(+1) = 1/2$.

- iii. Anhand dieser Auswertungen ist der größte Wert $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_3(x) = +1$ das globale Supremum (d.h. der Wert wird von der Funktion nur angenähert aber nicht angenommen), und der kleinste Wert $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_3(x) = -1$ ist das globale Infimum (d.h. der Wert wird von der Funktion nur angenähert aber nicht angenommen).

2. Anwendung der globalen Extrema:

- (a) Seien x der Radius der Dose und y die Höhe. Das Volumen ist $V = 0.0005\text{m}^3$, und es gilt

$$0.0005 = V = \pi x^2 y \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2000\pi x^2}$$

Die Oberfläche der Dose ist

$$O = \pi x^2 \quad (\text{Deckel}) \quad + \pi x^2 \quad (\text{Boden}) \quad + 2\pi x y \quad (\text{Seiten})$$

Durch die letzten zwei Gleichungen lässt sich die Oberfläche bezüglich einer einzigen Variable x darstellen,

$$O(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{2000\pi x^2}$$

Diese Funktion wird natürlich auf dem Definitionsbereich $D = (0, \infty)$ eingeschränkt, d.h. es ist nur sinnvoll dass $x > 0$ gilt, und es ist vorher unbekannt, wie groß x sein soll.

Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$O(x) = 2\pi x^2 + \frac{1}{1000x} \quad \text{mit } D = (0, \infty)$$

i. bestimmt man die kritischen Punkte anhand der Ableitung,

$$O'(x) = 4\pi x - \frac{1}{1000x^2} = \frac{4000\pi x^3 - 1}{1000x^2}$$

durch

- A. $z \in D$, wobei $O'(z) = 0$, ist $z = 1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})$,
- B. $c \in D$, wobei $O'(c)$ nicht existiert, sind keine (da $0 \notin D$) und
- C. r am Rand von D sind $r = 0, +\infty$,

ii. und wertet in diesen Stellen aus,

- A. $O(z)$ für jedes z ist $O(1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})) = 0.03(\pi/2)^{\frac{1}{3}}$,
- B. $O(c)$ für jedes c sind keine und
- C. $O(r)$ ($\lim_{x \rightarrow r^\pm} O(x)$, D offen) für jedes r ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} O(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} O(x)$$

iii. Anhand dieser Auswertungen ist der größte Wert $\lim_{x \rightarrow 0^+} O(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} O(x) = +\infty$ das globale Supremum (d.h. die Funktionswerte werden beliebig groß und $+\infty$ wird von der Funktion nicht angenommen), und der kleinste Wert $O(1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})) = 0.03(\pi/2)^{\frac{1}{3}}$ ist das globale Minimum. Daher werden Materialkosten durch

$$x^* = \frac{1}{10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \text{m} \approx 0.0430127 \text{m} \approx 4.3 \text{cm}$$

und

$$y^* = \frac{1}{2000\pi x^{*2}} \text{m} = \frac{1}{5 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \text{m} \approx 0.0860254 \text{m} \approx 8.6 \text{cm}.$$

minimiert.

(b) Sei der trapezförmige Querschnitt mit Eckpunkten $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-z, h)$ und (z, h) mit $z, h \geq 0$ definiert. Da die Punkte $(-z, h)$ und (z, h) in der Kurve $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ liegen müssen, folgt $h = \sqrt{1-z^2}$. Der gesamte Flächeninhalt (eines Trapezes) ist gegeben durch

$$F(z) = \frac{\text{Summe der Längen der parallelen Seiten}}{2} \times \text{Höhe} = \frac{2z+2}{2} y(z) = (z+1)\sqrt{1-z^2}$$

Diese Funktion wird natürlich mit dem Definitionsbereich $D = [0, 1]$ versehen, da die Aushöhlung für den Tunnel durch den halbkreisförmigen Querschnitt eingeschränkt ist.

Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$F(z) = (z+1)\sqrt{1-z^2} \quad \text{mit} \quad D = [0, 1]$$

i. bestimmt man die kritischen Punkte anhand der Ableitung,

$$F'(z) = \sqrt{1-z^2} + (1+z) \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1-z-2z^2}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{(1-2z)(1+z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}$$

durch

- A. $z \in D$, wobei $F'(z) = 0$, ist $z = 1/2$ ($-1 \notin D$),
- B. $c \in D$, wobei $F'(c)$ nicht existiert, ist $c = 1$ ($-1 \notin D$) und

- C. r am Rand von D sind $r = 0, 1$
- ii. und wertet in diesen Stellen aus,
- A. $F(z)$ für jedes z ist $F(1/2) = 3\sqrt{3}/4$,
- B. $F(c)$ für jedes c ist $F(1) = 0$ und
- C. $F(r)$ für jedes r sind $F(0) = 0, F(1) = 0$.
- iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $F(1/2) = 3\sqrt{3}/4$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $F(0) = F(1) = 0$. Daher wird der Flächeninhalt (und folglich der Durchfluss) durch $z = 1/2$ maximiert.

3. Findung einer Nullstelle:

- (a) Der Wert $\sqrt[3]{2}$ wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$ annäherungsweise mit dem Bisektionsverfahren folgendermaßen bestimmt. Als Polynom ist f auf \mathbb{R} stetig, und mit $a = 0$ und $b = 2$ gelten $f(a) = -2 < 0$ und $f(b) = 6 > 0$.

Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall $[0, 2]$ an. Mit den Anfangswerten $a = 0$ und $b = 2$ und immer $c = (a+b)/2$ liefert das Bisektionsverfahren folgende Ergebnisse:

c	$f(c)$	a	b
1.00000	-1.00000	0.00000	2.00000
1.50000	+1.37500	1.00000	2.00000
1.25000	-0.04688	1.00000	1.50000
1.37500	+0.59961	1.25000	1.50000
1.31250	+0.26099	1.25000	1.37500
1.28125	+0.10330	1.25000	1.31250
1.26562	+0.02729	1.25000	1.28125
1.25781	-0.01002	1.25000	1.26562
1.26172	+0.00857	1.25781	1.26562
1.25977	-0.00074	1.25781	1.26172
1.26074	+0.00391	1.25977	1.26172
1.26025	+0.00159	1.25977	1.26074
1.26001	+0.00042	1.25977	1.26025
1.25989	-0.00016	1.25977	1.26001
1.25995	+0.00013	1.25989	1.26001
1.25992	-0.00001	1.25989	1.25995
1.25993	+0.00006	1.25992	1.25995

d.h. eine Nullstelle für $f(x)$ ist $x_0 \approx 1.2599$.

- (b) Der Wert $\sqrt[3]{2}$ wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$ annäherungsweise mit dem Newtonschen Verfahren folgendermaßen bestimmt. Als Polynom ist f auf \mathbb{R} differenzierbar. Die Iteration des Newtonschen Verfahrens ist

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 2}{3x_k^2}$$

oder

$$x_{k+1} = \frac{2(1 + x_k^3)}{3x_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Mit $x_0 = 2$ liefert das Newtonsche Verfahren folgende Ergebnisse

k	x_k
0	2.0000
1	1.5000
2	1.2963
3	1.2609
4	1.2599
5	1.2599

d.h. eine Nullstelle für $f(x)$ ist $x_0 \approx 1.2599$. Hier findet man das Ergebnis mit viel weniger Aufwand durch das Newtonsche Verfahren als durch das Bisektionsverfahren.

4. Regel der l'Hôpital:

Bevor die Regel der l'Hôpital angewendet werden darf, muss kontrolliert werden, ob es sich um eine unbestimmte Form handelt, z.B. $0/0$, ∞/∞ , 0^∞ , ∞^0 , etc.

- (a) Für die Funktion $f_1(x) = \sin(2x)/x$ gibt es den Grenzwert $\sin(2x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ für den Zähler von f_1 und den Grenzwert $x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ für den Nenner von f_1 . Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D_x \sin(2x)}{D_x x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) D_x(2x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(2x) = 2$$

- (b) Für die Funktion $f_2(x) = xe^{-2x}$ gibt es den Grenzwert $e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ für den Nenner des Terms $e^{-2x} = 1/e^{2x}$ in f_2 und den Grenzwert $x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$ für den Zähler x von f_2 . Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D_x x}{D_x e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} D_x(2x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$$

- (c) Für die Funktion $f_3(x) = x \ln(1/x)$ gibt es den Grenzwert $x^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$ für den Nenner des Terms $x = 1/x^{-1}$ in f_3 und den Grenzwert $\ln(1/x) = -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ für den Zähler $\ln(1/x)$ von f_3 . Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^{-1})}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-D_x \ln(x)}{D_x x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

5. Implizites Ableiten:

- (a) In Abhängigkeit von der Zeit t (sek) ist die Beziehung zwischen dem Volumen $V(t)$ (cm^3), dem Radius $r(t)$ (cm) und der Höhe $h(t)$ (cm) des zylinderförmigen Pizzateigs gegeben durch

$$500 = V(t) = \pi r^2(t)h(t).$$

Da das Volumen konstant bleibt, ist die zeitliche Änderungsrate des Volumens

$$V'(t) = 0 \text{ cm}^3/\text{sek}.$$

Gegeben worden ist, die zeitliche Änderungsrate der Höhe ist

$$h'(t) = -1 \text{ cm/sek}$$

Auch gegeben worden sind, die Anfangshöhe ist

$$h(0) = 10 \text{ cm}$$

und die Endhöhe ist

$$h(\tau) = 0.5 \text{ cm,}$$

wobei τ die Endzeit bezeichnet. Mit der obigen zeitlichen Änderungsrate der Höhe $h'(t) = -1 \text{ cm/sek} = h'$ (Konstante), $0 \leq t \leq \tau$, folgt

$$h(t) = h(0) + h' \times t = 10 - t.$$

Durch die Auswertung in $t = \tau$ folgt aus $0.5 = h(\tau) = 10 - \tau$ dass

$$\tau = 9.5 \text{ sek.}$$

(b) Aus der Anfangsbeziehung zwischen Volumen, Radius und Höhe,

$$500 = V(0) = \pi r(0)^2 h(0) = 10\pi r(0)^2$$

folgt der Anfangsradius

$$r(0) = \sqrt{50/\pi} \approx 4.0 \text{ cm.}$$

Aus der Endbeziehung zwischen Volumen, Radius und Höhe,

$$500 = V(\tau) = \pi r(\tau)^2 h(\tau) = 0.5\pi r(\tau)^2$$

folgt der Endradius

$$r(\tau) = \sqrt{1000/\pi} \approx 17.8 \text{ cm.}$$

Aus der Beziehung zwischen den durch implizites Ableiten gegebenen Änderungsraten

$$0 = V'(t) = 2\pi r(t)r'(t)h(t) + \pi r(t)^2 h'(t) = 2\pi r(t)r'(t)(10 - t) - \pi r(t)^2$$

folgen anfänglich d.h. zur Zeit $t = 0$,

$$0 = V'(0) = 20\pi r(0)r'(0) - \pi r(0)^2 = 20\pi\sqrt{50/\pi}r'(0) - \pi(\sqrt{50/\pi})^2$$

$$\text{oder } r'(0) = 1/(2\sqrt{2\pi}) \approx 0.2 \text{ cm/sek}$$

und endlich d.h. zur Zeit $t = \tau$,

$$0 = V'(\tau) = \pi r(\tau)r'(\tau) - \pi r(\tau)^2 = \pi\sqrt{1000/\pi}r'(\tau) - \pi(\sqrt{1000/\pi})^2$$

$$\text{oder } r'(\tau) = \sqrt{1000/\pi} \approx 17.8 \text{ cm/sek.}$$