Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften
Lösungen der Beispiele des 7. Übungsblatts

1. Steigende und Fallende Funktionen:

   Die waagerechte Asymptote für die Funktion $r(t) = t/(2t+3)$ ist gegeben durch

$$r^* = \lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{2t+3}\left(\frac{t^{-1}}{t^{-1}}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2+3/t} = \frac{1}{2}$$

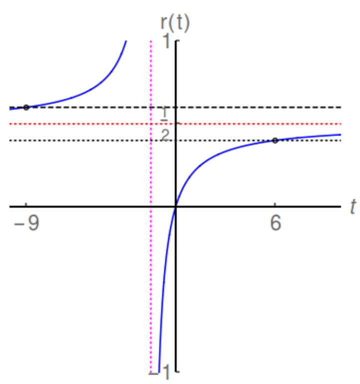
   Die Gleichung $|r^* - r(\tau)| = 1/10$ gilt, wenn entweder $r^* - r(\tau) = -1/10$ oder $r^* - r(\tau) = 1/10$ gelten. Die Gleichung $r^* - r(t_1) = -1/10$ gilt, wenn

$$-\frac{1}{10} = r^* - r(t_1) = \frac{1}{2} - \frac{t_1}{2t_1+3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{5} = \frac{t_1}{2t_1+3} \quad\Leftrightarrow\quad 6t_1 + 9 = 5t_1 \quad \text{oder} \quad t_1 = -9$$

   Die Gleichung $r^* - r(t_2) = 1/10$ gilt, wenn

$$\frac{1}{10} = r^* - r(t_2) = \frac{1}{2} - \frac{t_2}{2t_2+3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{5} = \frac{t_2}{2t_2+3} \quad\Leftrightarrow\quad 4t_2 + 6 = 5t_2 \quad \text{oder} \quad t_2 = 6$$

   Man sieht diese Punkte $(t_1, r(t_1)) = (-9, r(-9))$ und $(t_2, r(t_2)) = (6, r(6))$ in der folgenden grafischen Darstellung des Beispiels.



   Die Grafik für $r(t)$ ist blau, die waagerechte Asymptote ($y = r^* = \frac{1}{2}$) ist gepunktet rot, die senkrechte Asymptote ($x = -\frac{2}{3}$) ist gepunktet magenta und der *Schlauch* rund um die waagerechte Asymptote (d.h. $y = r^* - \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$, $y = r^* + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}\}$) liegt zwischen den schwarz gestrichelten waagerechten Linien.

   Der Wert $\tau \in \mathbb{R}_+$ (d.h. $\tau > 0$ und $t_1 = -9 \notin \mathbb{R}_+, t_2 = +6 \in \mathbb{R}_+$), bei dem $|r^* - r(\tau)| = 1/10$ gilt, ist daher $\tau = t_2 = 6$.

   Die Ableitung von $r(t)$ erfüllt

$$r'(t) = \frac{1(2t+3) - t(2)}{(2t+3)^2} = \frac{3}{(2t+3)^2} > 0, \quad \forall t > \tau \quad (\text{tatsächlich } \forall t \neq -\tfrac{3}{2})$$

und daher ist $r(t)$ streng steigend auf dem Intervall $(\tau, +\infty)$, wie man in der oberen Grafik sieht. Daher für $t > \tau$ gilt

$$r^* - \frac{1}{10} = r(\tau) < r(t) < \lim_{t\to\infty} = r^*$$

Wenn mit (-1) multipliziert wird, ergibt sich

$$\frac{1}{10} - r^* > -r(t) > -r^*$$

Wenn r^* summiert wird, ergibt sich

$$\frac{1}{10} > r^* - r(t) > 0$$

und daher folgt die gewünschte Ungleichung

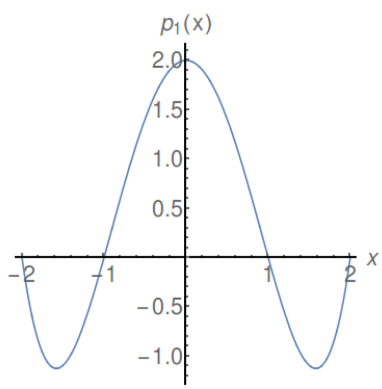
$$0 < r^* - r(t) = |r^* - r(t)| < \frac{1}{10}, \quad \forall t > \tau = 6.$$

2. Bildbereich durch lokale Extrema:

   (a) Das Polynom

   $$p_1(x) = (4 - 5x^2 + x^4)/2 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

   hat die grafische Darstellung,



   Die Ableitung ist

   $$p_1'(x) = x(2x^2 - 5) = 2x(x + \sqrt{5/2})(x - \sqrt{5/2})$$

   Anhand der folgenden Tabelle,

	$[-2, -\sqrt{5/2})$	$(-\sqrt{5/2}, 0)$	$(0, \sqrt{5/2})$	$(\sqrt{5/2}, +2]$
$2x$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + \sqrt{5/2})$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - \sqrt{5/2})$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$p_1'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$p_1(x)$	fallend	steigend	fallend	steigend

   sieht man, $p_1(x)$ besitzt lokale Extrema in

   $$x = -2, \quad -\sqrt{5/2}, \quad 0, \quad +\sqrt{5/2} \quad \text{und} \quad +2.$$

Auswertungen in diesen Stellen sind

$$p_1(-2) = 0, \quad p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8, \quad p_1(0) = 2, \quad p_1(+\sqrt{5/2}) = -9/8 \quad \text{und} \quad p_1(+2) = 0.$$

Da $p_1(x)$ in den jeweiligen Teilintervallen, $[-2, -\sqrt{5/2})$, $(\sqrt{5/2}, 0)$, $(0, \sqrt{5/2})$ und $(\sqrt{5/2}, 2]$, stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $p_1(x)$ genau alle Werte annimmt, die zwischen den p_1-Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In $[-2, -\sqrt{5/2})$ nimmt $p_1(x)$ genau die Werte zwischen $p_1(-2) = 0$ und $p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8$ an.

In $(-\sqrt{5/2}, 0)$ nimmt $p_1(x)$ genau die Werte zwischen $p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8$ und $p_1(0) = 2$ an.

In $(0, \sqrt{5/2})$ nimmt $p_1(x)$ genau die Werte zwischen $p_1(0) = 2$ und $p_1(\sqrt{5/2}) = -9/8$ an.

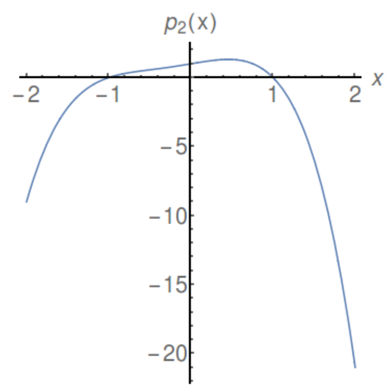
In $(\sqrt{5/2}, 2]$ nimmt $p_1(x)$ genau die Werte zwischen $p(\sqrt{5/2}) = -9/8$ und $p_1(2) = 0$ an.

Daher ist der Bildbereich $B = [-9/8, 2]$. (vgl. Seite 31 im Skriptum)

(b) Das Polynom

$$p_2(x) = 1 + x - x^3 - x^4 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

hat die grafische Darstellung,



Die Ableitung ist

$$p_2'(x) = 1 - 3x^2 - 4x^3$$

Wegen der Stetigkeit von $p_2'(x)$ und den Auswertungen $p_2'(0) = 1$ und $p_2'(1) = -6$ existiert eine Nullstelle für $p_2'(x)$ im Intervalle $[0,1]$. Man sieht mit dem Bisektionsverfahren,

c	$p_2'(c)$	a	b
0.50000	−0.25000	0.00000	1.00000
0.25000	0.75000	0.00000	0.50000
0.37500	0.36719	0.25000	0.50000
0.43750	0.09082	0.37500	0.50000
0.46875	−0.07117	0.43750	0.50000
0.45312	0.01189	0.43750	0.46875
0.46094	−0.02912	0.45312	0.46875
0.45703	−0.00849	0.45312	0.46094
0.45508	0.00173	0.45312	0.45703
0.45605	−0.00337	0.45508	0.45703
0.45557	−0.00082	0.45508	0.45605
0.45532	0.00046	0.45508	0.45557
0.45544	−0.00018	0.45532	0.45557
0.45538	0.00014	0.45532	0.45544
0.45541	−0.00002	0.45538	0.45544
0.45540	0.00006	0.45538	0.45541
0.45541	0.00002	0.45540	0.45541

$p_2'(x)$ besitzt eine Nullstelle in $x_3 \approx 0.45541$. Durch Polynomdivision

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & -4.00000x^3 & -3.00000x^2 & & 1.00000 & \div & x-0.45541 & = & -4.00000x^2-4.82164x-2.19582 \\
\ominus & -4.00000x^3 & +1.82164x^2 & & & & & & \\
\hline
 & 0 & -4.82164x^2 & & 1 & & & & \\
\ominus & & -4.82164x^2 & +2.19582x & 1.00000 & & & & \\
\hline
 & & 0 & -2.19582x & 1.00000 & & & & \\
\ominus & & & -2.19582x & 1.00000 & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

ergibt sich die Faktorisierung,

$$p_2'(x) = (x - 0.45541)(-4.00000x^2 - 4.82164x - 2.19582)$$

und die Nullstellen des quadratischen Faktors $(-4.00000x^2 - 4.82164x + 2.19582)$ sind

$$x_{1,2} = \frac{4.82164 \pm \sqrt{4.82164^2 - 4(-4.00000)(-2.19582)}}{2(-4.00000)} = \frac{4.82164 \pm \sqrt{-11.8849}}{-8.00000} \in \mathbb{C}$$

Daher ist $x_3 \approx 0.45541$ die *einzige* (reele) Nullstelle von $p_2'(x)$. Anhand der Stetigkeit von $p_2'(x)$ folgt mit dem Zwischenwertsatz durch die Auswertungen,

$$\begin{array}{lll}
p_2'(0) = +1 > 0 & \text{dass} & p_2'(x) > 0 \text{ gilt in } [-2, x_3) \\
p_2'(1) = -6 < 0 & \text{dass} & p_2'(x) < 0 \text{ gilt in } (x_3, +2]
\end{array}$$

Daher besitzt $p_2(x)$ lokale Extrema in

$$x = -2, \quad x_3 \approx 0.45541 \quad \text{und} \quad +2.$$

Auswertungen in diesen Stellen sind

$$p_2(-2) = -9, \quad p_2(x_3) = \mu \approx 1.31794 \quad \text{und} \quad p_2(+2) = -21.$$

Da $p_2(x)$ in den jeweiligen Teilintervallen, $[-2,-x_3)$ und $(x_3,2]$, stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $p_2(x)$ genau alle Werte annimmt, die zwischen den p_2-Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In $[-2,x_3)$ nimmt $p_2(x)$ genau die Werte zwischen $p_2(-2)=-9$ und $p_2(x_3)=\mu\approx 1.31794$ an.

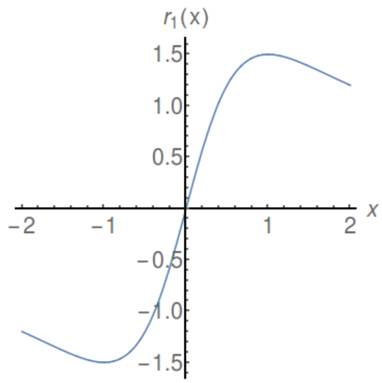
In $(x_3,+2]$ nimmt $p_2(x)$ genau die Werte zwischen $p_2(x_3)=\mu\approx 1.31794$ und $p_2(2)=-21$ an.

Daher ist der Bildbereich $B=[-21,\mu]$. (vgl. Seite 31 im Skriptum)

(c) Die rationale Funktion

$$r_1(x)=3x/(1+x^2) \quad \text{mit} \quad D=[-2,+2]$$

hat die grafische Darstellung



Die Ableitung ist

$$r_1'(x)=\frac{3(1+x^2)-(3x)(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{3(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

Anhand der folgenden Tabelle,

	$[-2,-1)$	$(-1,+1)$	$(+1,+2]$
$(1+x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(1-x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$(1+x^2)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r_1'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
$r_1(x)$	fallend	steigend	fallend

sieht man, $r_1(x)$ besitzt lokale Extrema in

$$x=-2, \quad -1, \quad +1 \qquad \text{und} \qquad +2.$$

Auswertungen in diesen Stellen sind

$$r_1(-2)=-6/5, \quad r_1(-1)=-3/2, \quad r_1(+1)=+3/2 \qquad \text{und} \quad r_1(+2)=6/5.$$

Da $r_1(x)$ in den jeweiligen Teilintervallen, $[-2,-1)$, $(-1,+1)$ und $(+1,+2]$, stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $r_1(x)$ genau alle Werte annimmt, die zwischen den r_1-Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In $[-2,-1)$ nimmt $r_1(x)$ genau die Werte zwischen $r_1(-2) = -6/5$ und $r_1(-1) = -3/2$ an.

In $(-1,+1)$ nimmt $r_1(x)$ genau die Werte zwischen $r_1(-1) = -3/2$ und $r_1(+1) = +3/2$ an.

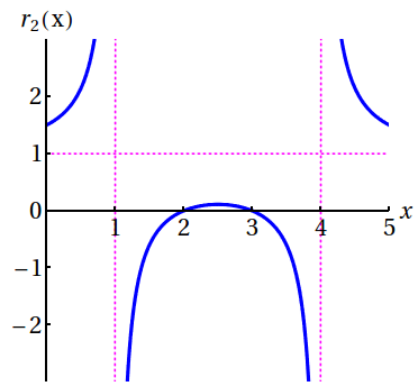
In $(+1,+2]$ nimmt $r_1(x)$ genau die Werte zwischen $r_1(+1) = +3/2$ und $r_1(+2) = +6/5$ an.

Daher ist der Bildbereich $B = [-3/2, 3/2]$. (vgl. Seite 35 im Skriptum)

(d) Die rationale Funktion

$$r_2(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} \quad \text{mit} \quad D = [0,5]\backslash\{1,3\}$$

hat die grafische Darstellung



Die Ableitung ist

$$r_2'(x) = \frac{(2x-5)(x^2-5x+4) - (x^2-5x+6)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{10-4x}{(x^2-5x+4)^2}$$

Anhand der folgenden Tabelle,

	$[0,1)$	$(1,5/2)$	$(5/2,4)$	$(4,5]$
$(10-4x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$(x^2-5x+4)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r_2'(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$r_2(x)$	steigend	steigend	fallend	fallend

sieht man, $r_2(x)$ besitzt lokale Extrema in

$$x = 0, \quad 5/2 \qquad \text{und} \qquad 5.$$

Auswertungen in diesen Stellen und Grenzwerte in $\{1^{\pm}, 4^{\pm}\}$ (isolierte Punkte außerhalb von D) sind

$$r_2(0) = 3/2,$$

$$\lim_{x\to 1^-} r_2(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} r_2(x) = -\infty,$$

$$r_2(5/2) = 1/9$$

$$\lim_{x\to 4^-} r_2(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 4^+} r_2(x) = +\infty$$
$$\text{und} \quad r_2(5) = 3/2.$$

Da $r_2(x)$ in den jeweiligen Teilintervallen, $[0,1)$, $(1,5/2]$, $[5/2,4)$ und $(4,5]$, stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $r_2(x)$ genau alle Werte annimmt, die zwischen den r_2-Werten oder r_2-Grenzwerten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In $[0,1)$ nimmt $r_2(x)$ genau die Werte zwischen $r_2(0) = 3/2$ und $\lim_{x\to 1^-} r_2(x) = +\infty$ an.

In $(1,5/2]$ nimmt $r_2(x)$ genau die Werte zwischen $\lim_{x\to 1^+} r_2(x) = -\infty$ und $r_2(5/2) = 1/9$ an.

In $[5/2,4)$ nimmt $r_2(x)$ genau die Werte zwischen $r_2(5/2) = 1/9$ und $\lim_{x\to 4^-} r_2(x) = -\infty$ an.

In $(4,5]$ nimmt $r_2(x)$ genau die Werte zwischen $\lim_{x\to 4^+} r_2(x) = +\infty$ und $r_2(5) = 3/2$ an.

Daher ist der Bildbereich $B = [3/2, +\infty) \cup (-\infty, 1/9]$. (vgl. Seite 68 im Skriptum)

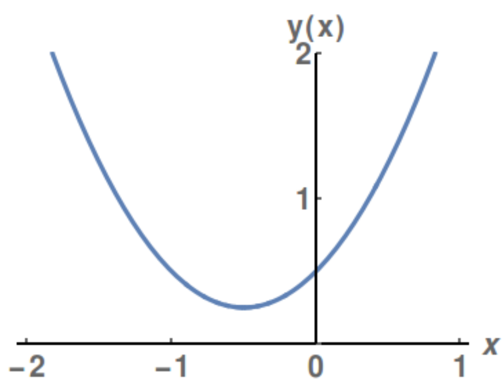
3. Kriterien der lokalen Extrema:

   (a) Die folgenden sind alle lokalen Extrema der auf Seiten 92 - 101 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der ersten Ableitung zutrifft. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Blatt 6, Beispiel 4.

      i. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2x + 1 = 2(x + 1/2)$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, +\infty)$
$(x+1/2)$	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	steigend

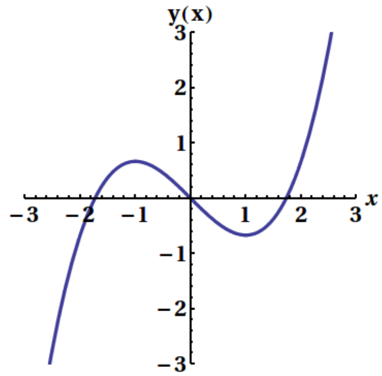
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = -\frac{1}{2}$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +1]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +1$.

ii. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, \infty)$
$(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	steigend	fallend	steigend

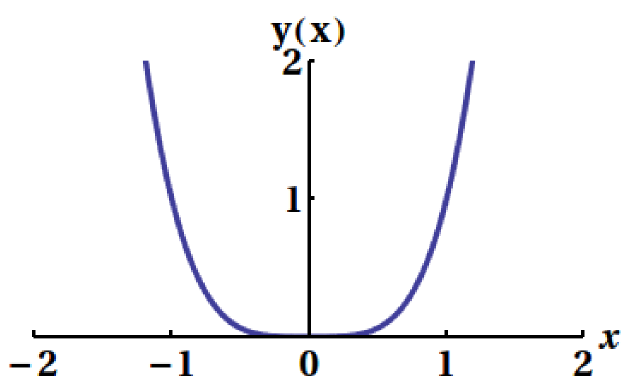
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in $x = -1$ und ein lokales Minimum in $x = +1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Minimum in $x = -2$ und ein lokales Maximum in $x = +2$.

iii. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 4x^3$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
x^3	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	steigend

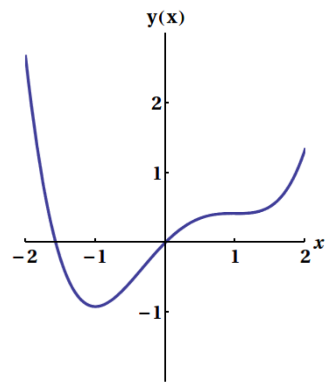
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$.

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, \infty)$
$(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	steigend	steigend

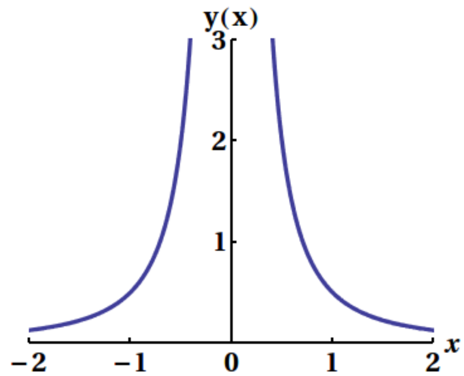
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = -1$. Laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es aber kein lokales Extremum in $x = 1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$.

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$-x^3$	$\oplus$	$\ominus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$
$y(x)$	steigend	fallend

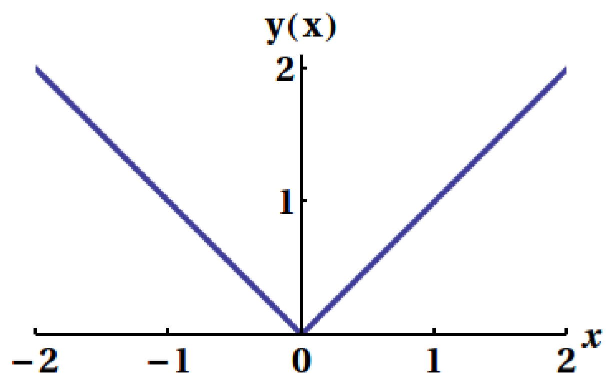
Anhand der Tabelle vermutet man, dass $x = 0$ ein lokales Maximum ist, aber diese Stelle ist nicht im Definitionsbereich der Funktion. Daher besitzt die Funktion *keine* lokalen Extrema.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in $x = -2$ und in $x = +2$.

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sign}(x) =$	-1	$+1$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	steigend

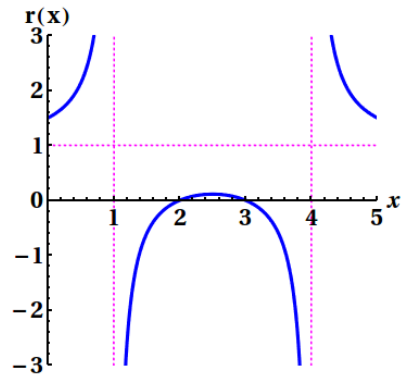
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$.

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$$

ist



Es gelten

$$r'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 4\frac{5/2 - x}{(x-1)^2(x-4)^2}, \quad x \neq 1, 4$$

	$(-\infty, +1)$	$(+1, +5/2)$	$(+5/2, +4)$	$(+4, +\infty)$
$(x-1)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-4)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(5/2 - x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$r'(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$r(x)$	steigend	steigend	fallend	fallend

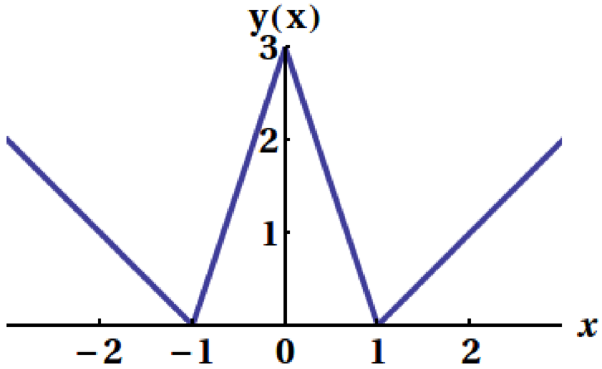
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in $x = 5/2$. Obwohl es hier wenig gefähr gibt, dass man die Stellen der senkrechten Asymptoten irrtümlich als Extremstellen nennen würde, darf man nicht vergessen, dass die Stellen $x = 1$ und $x = 4$ nicht im Definitionsbereich liegen, und daher sind sie für Extremstellen sowieso ausgeschlossen.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [0, 5]\backslash\{1, 4\}$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in $x = 0$ und in $x = 5$.

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x + 1| - 3|x| + 2|x - 1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\text{sign}(x+1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x-1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +1)$	$(+1, +\infty)$
$+2\text{sign}(x+1) =$	-2	$+2$	$+2$	$+2$
$-3\text{sign}(x) =$	$+3$	$+3$	-3	-3
$+2\text{sign}(x-1) =$	-2	-2	-2	$+2$
$y'(x) =$	-1	$+3$	-3	$+1$
$y(x)$	fallend	steigend	fallend	steigend

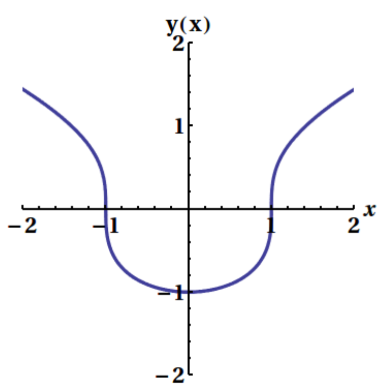
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Minima in $x = -1$ und $x = +1$ und ein lokales Maximum in $x = 0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-3, +3]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -3$ und in $x = +3$.

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+1)$	$(+1,+\infty)$
$(x+1)^{\frac{2}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)^{\frac{2}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
x	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	fallend	steigend	steigend

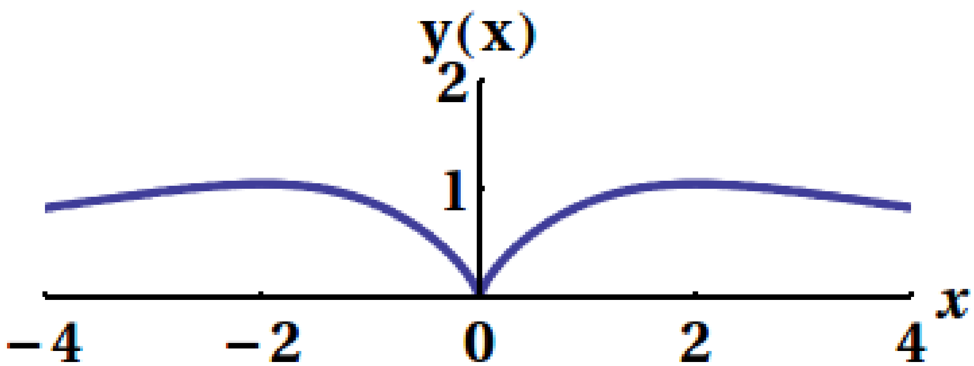
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x=0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D=[-2,+2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x=-2$ und in $x=+2$.

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x)=\frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8+x^2},\quad D=\mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x)=\frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2}=\frac{32}{3(8+x^2)^2}\,\frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}},\quad x\neq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+2)$	$(+2,\infty)$
$(2+x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(2-x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$\sqrt[3]{x}$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
$y(x)$	steigend	fallend	steigend	fallend

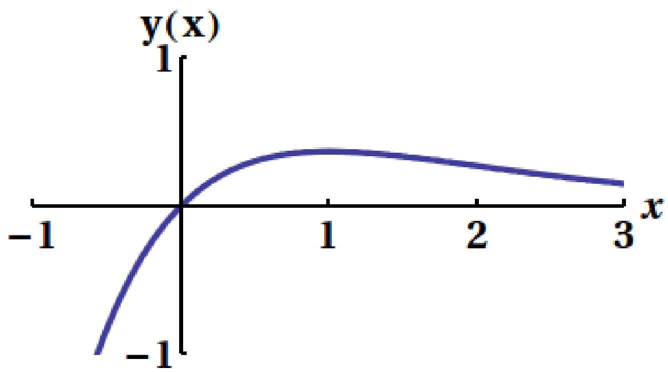
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Maxima in $x=-2$ und $x=+2$ und ein lokales Minimum in $x=0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D=[-4,+4]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in $x=-4$ und in $x=+4$.

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x)=xe^{-x},\quad D=\mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = e^{-x}(1-x) \quad \begin{cases} > 0, & x < 1 \\ < 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$y(x) \begin{cases} \text{steigend}, & x < 1 \\ \text{fallend}, & x > 1 \end{cases}$$

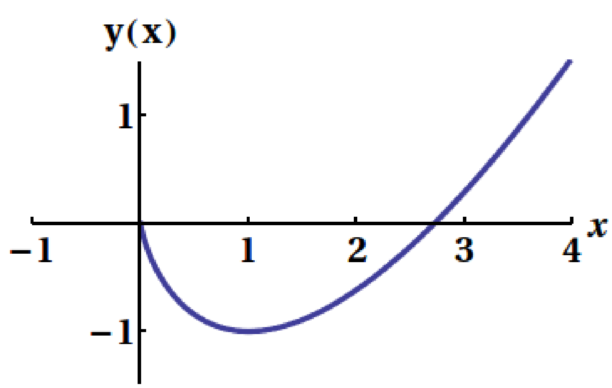
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in $x = 1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-1, +3]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in $x = -1$ und in $x = +3$.

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x\ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$

$$y'(x) \begin{cases} < 0, & x \in (0,1) \\ > 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$y(x) \begin{cases} \text{fallend}, & x \in (0,1) \\ \text{steigend}, & x > 1 \end{cases}$$

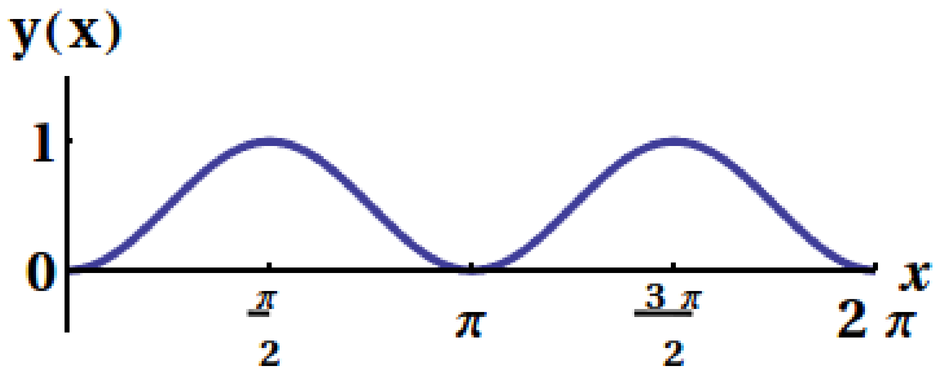
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 1$.

Die Funktion lässt sich mit dem Punkt $(0,0)$ stetig ergänzen. Falls der Definitionsbereich auf $D = [0, +4]$ ergänzt bzw. eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = 0$ und in $x = +4$.

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$y'(x) \begin{cases} = \quad 0, & x = \frac{k}{2}\pi, & & k = 0, 1, 2, 3, 4 \\ = +1, & x = \frac{1}{4}\pi & \Rightarrow \; > 0, & x \in (0, \frac{1}{2}\pi) \\ = +1, & x = \frac{5}{4}\pi & \Rightarrow \; > 0, & x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ = -1, & x = \frac{3}{4}\pi & \Rightarrow \; < 0, & x \in (\frac{1}{2}\pi, \pi) \\ = -1, & x = \frac{7}{4}\pi & \Rightarrow \; < 0, & x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$y(x) \begin{cases} \text{steigend}, & x \in (0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ \text{fallend}, & x \in (\frac{1}{2}\pi, \pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

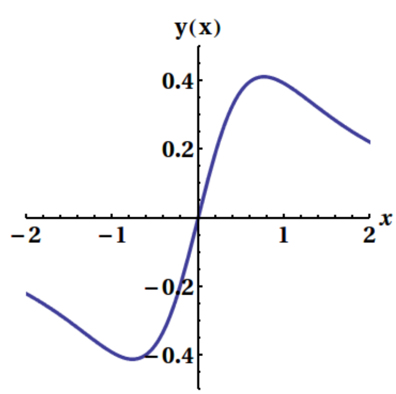
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Minima in $x = 0, \pi, 2\pi$ und lokale Maxima in $x = \pi/2, 3\pi/2$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [\pi/4, 5\pi/4]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Minimum in $x = \pi/4$ und ein lokales Maximum in $x = 5\pi/4$.

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1 + x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten mit $x_0 \approx 0.7654$ durch das Bisektionsverfahren gefunden (Blatt 5, Beispiel 3a),

$$y'(x) = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}, \quad y'(x_0) = 0,$$

$$y'(x) \begin{cases} = \quad 0, & x = \pm x_0 \\ = \ +1, & x = 0 \quad \Rightarrow > 0, \quad x \in (-x_0, x_0) \\ \approx -0.1, & x = -1 \quad \Rightarrow < 0, \quad x \in (-\infty, -x_0) \\ \approx -0.1, & x = +1 \quad \Rightarrow < 0, \quad x \in (x_0, +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) \begin{cases} \text{fallend}, & x \in (-\infty, -x_0) \\ \text{steigend}, & x \in (-x_0, x_0) \\ \text{fallend}, & x \in (x_0, +\infty) \end{cases}$$

und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = -x_0$ und ein lokales Maximum in $x = x_0$.

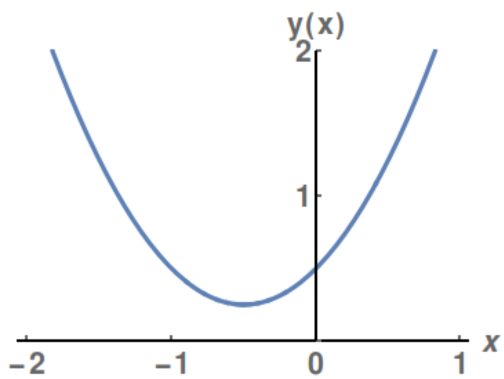
Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Maximum in $x = -2$ und ein lokales Minimum in $x = +2$.

(b) Die folgenden sind alle lokalen Extrema der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der zweiten Ableitung zutrifft. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Blatt 6, Beispiel 4.

i. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2(x + 1/2), \quad y''(x) = 2 > 0$$

$$y'(-\tfrac{1}{2}) = 0, \quad y''(-\tfrac{1}{2}) = 2 > 0$$

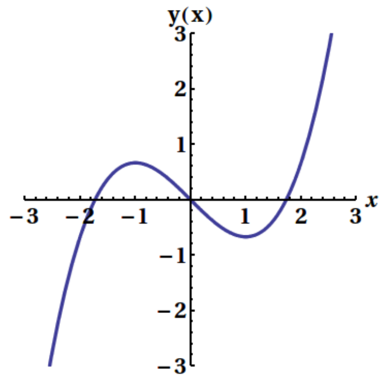
und daher laut des Kriteriums der zweiten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = -\frac{1}{2}$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +1]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +1$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

ii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \quad y''(x) = 2x$$
$$y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = -2 < 0$$
$$y'(+1) = 0, \quad y''(-1) = +2 > 0$$

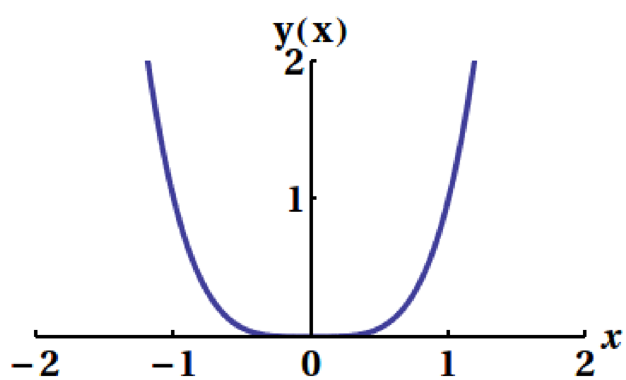
und daher laut des Kriteriums der zweiten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in $x = -1$ und ein lokales Minimum in $x = +1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, 2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Minimum in $x = -2$ und ein lokales Maximum in $x = 2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

iii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 4x^3, \quad y''(x) = 12x^2$$
$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

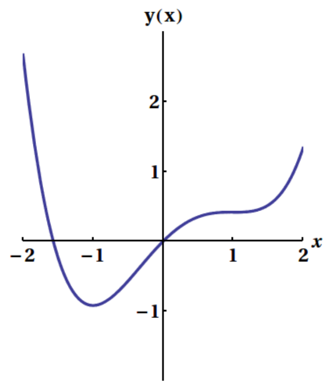
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt!

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$
$$y''(x) = -1 - 2x + 3x^2 = (x-1)(3x+1)$$
$$y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = 2 > 0$$
$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

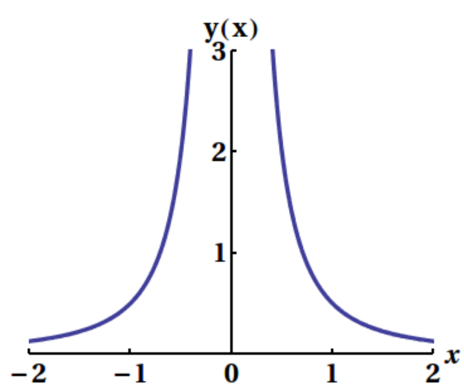
und daher gibt es ein lokales Minimum in $x = -1$, aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann es nicht festgestellt werden, dass es kein lokales Extremum in $x = 1$ gibt!

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = \frac{3}{x^4}, \quad x \neq 0$$

$$y'(0) \text{ exisitert nicht und } y''(0) \text{ exisitert nicht.}$$

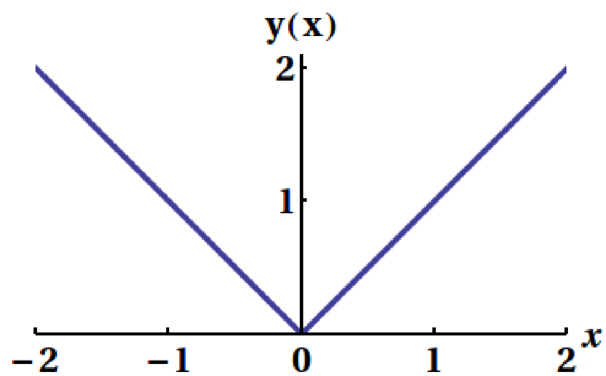
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nichts über die Stelle $x = 0$ festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$$y'(0) \text{ exisitert nicht und } y''(0) \text{ exisitert nicht.}$$

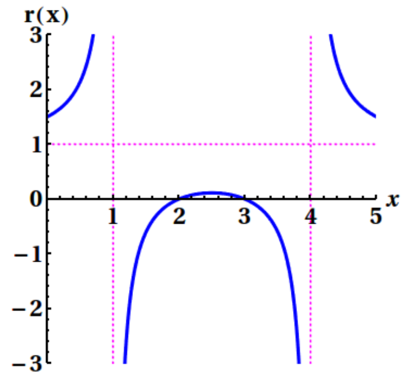
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$$

ist



Es gelten

$$r'(x) = \frac{10-4x}{(x^2-5x+4)^2} = 4\frac{5/2-x}{(x-1)^2(x-4)^2}, \quad x \neq 1,4$$

$$r''(x) = \frac{12(7-5x+x^2)}{(x^2-5x+4)^3} = 12\frac{(x-5/2)^2+3/4}{(x-1)^3(x-4)^3}, \quad x \neq 1,4$$

$$y'(1)\ \&\ y''(1) \text{ und } y'(4)\ \&\ y''(4) \text{ exisitieren nicht, aber}$$

$$y'(5/2) = 0, \quad y''(5/2) = -64/81 < 0$$

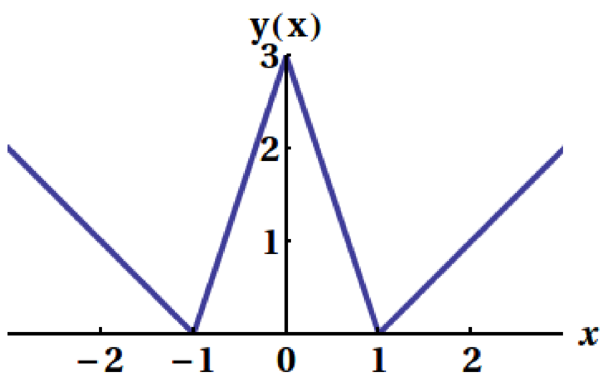
und daher gibt es ein lokales Maximum in $x = 5/2$, aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nichts über die Stellen $x = 1, 4$ festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [0,5]\backslash\{1,4\}$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Minima in $x = 0$ und in $x = 5$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\text{sign}(x+1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x-1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

$$y''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

$$y'(-1)\ \&\ y''(-1), \quad y'(0)\ \&\ y''(0) \text{ und } y'(+1)\ \&\ y''(+1) \text{ existieren nicht}$$

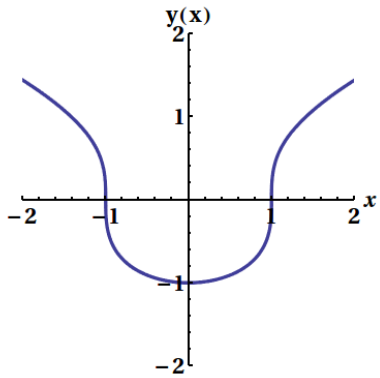
und daher mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nicht festgestellt werden, dass es lokale Extrema in $x = -1, 0, +1$ gibt.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-3, +3]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -3$ und in $x = +3$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$
$$y''(x) = \frac{2(x^2+3)}{9(x^2-1)^{\frac{5}{3}}} = \frac{2(x^2+3)}{9(x+1)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{5}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$
$$y'(-1) \ \& \ y''(-1) \text{ und } y'(+1) \ \& \ y''(+1) \text{ exisitieren nicht, aber}$$
$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2/3 > 0$$

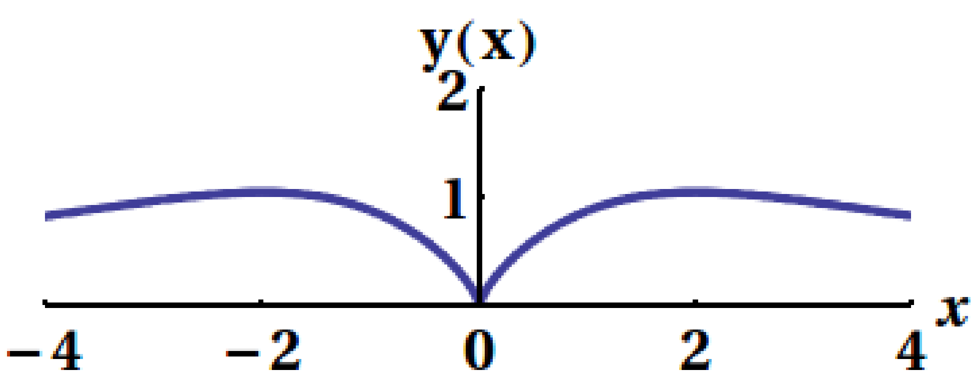
und daher gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$, aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nichts über die Stellen $x = -1, +1$ festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8 + x^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2} = \frac{32}{3(8+x^2)^2}\frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = \frac{32(7x^4 - 92x^2 - 32)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^3}, \quad x \neq 0$$

$$y'(0) \ \& \ y''(0) \text{ existieren nicht, aber}$$

$$y'(-2) = 0, \quad y''(-2) = -4^{\frac{4}{3}}/27 < 0 \quad \text{und} \quad y'(+2) = 0, \quad y''(+2) = -4^{\frac{4}{3}}/27 < 0$$

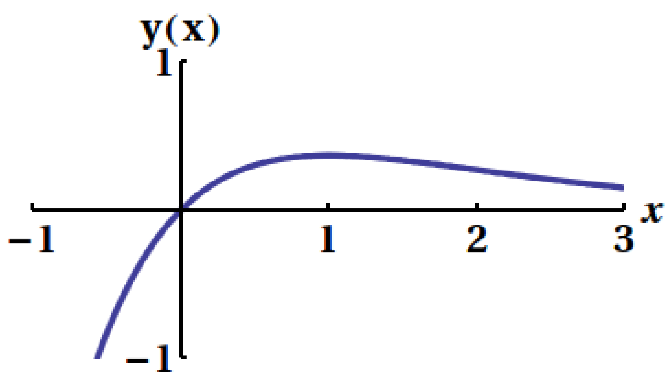
und daher gibt es lokale Maxima in $x = -2$ und $x = +2$, aber mit dem Kriterium des zweiten Ableitung kann nicht festgestellt, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt!

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-4, +4]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Minima in $x = -4$ und in $x = +4$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = e^{-x}(1-x)$$

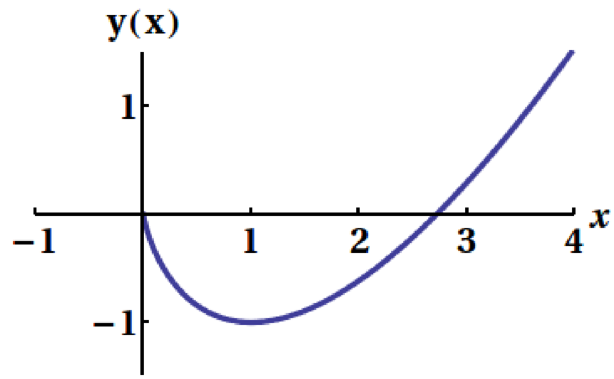
$$y''(x) = e^{-x}(x-2)$$

$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = -e < 0$$

und daher gibt es ein lokales Maximum in $x = 1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-1, +3]$ eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokale Minima in $x = -1$ und in $x = +3$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,



Es gelten

$$y(x) = x\ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$
$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$
$$y''(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$
$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = 1 > 0$$

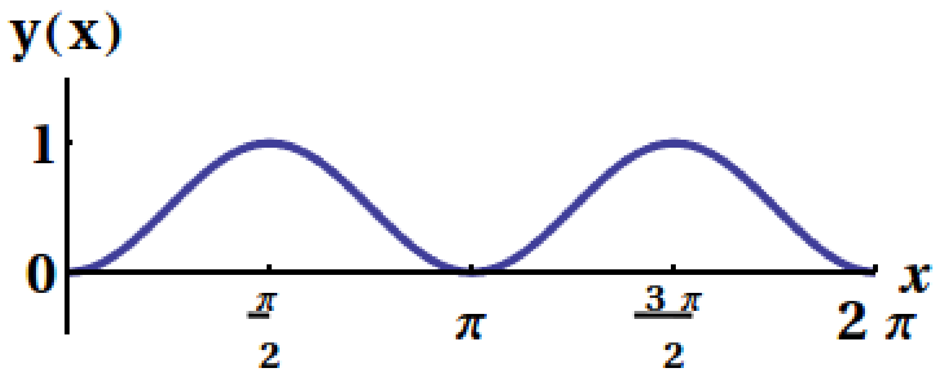
und daher gibt es ein lokales Minimum in $x = 1$.

Die Funktion lässt sich mit dem Punkt $(0, 0)$ stetig ergänzen. Falls der Definitionsbereich auf $D = [0, +4]$ ergänzt bzw. eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = 0$ und in $x = +4$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$
$$y''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2\cos(2x)$$
$$y'(0) = y'(\pi) = y'(2\pi) = 0 = y'(\pi/2) = y'(3\pi/2)$$
$$y''(0) = y''(\pi) = y''(2\pi) = 2, \quad y''(\pi/2) = y''(3\pi/2) = -2$$

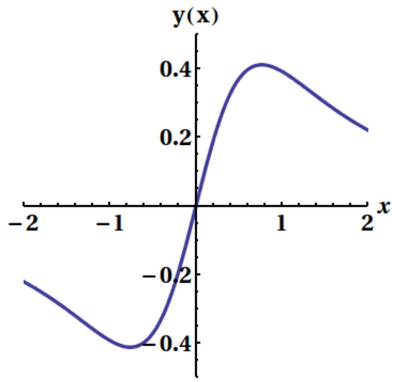
und daher gibt es lokale Minima in $x = 0, \pi, 2\pi$ und lokale Maxima in $x = \pi/2, 3\pi/2$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [\pi/4, 5\pi/4]$ eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Minimum in $x = \pi/4$ und ein lokales Maximum in $x = 5\pi/4$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1 + x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten mit $x_0 \approx 0.7654$ durch das Bisektionsverfahren gefunden (Blatt 5, Beispiel 3a),

$$y'(x) = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$y''(x) = \frac{(6x^2 - 2)\tan^{-1}(x) - 6x}{(1 + x^2)^3}$$

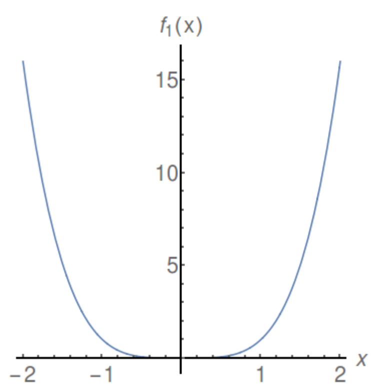
$$y'(-x_0) = 0, \quad y''(-x_0) \approx +0.903332 > 0 \quad \text{und} \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) \approx -0.903332 < 0$$

und daher gibt es ein lokales Minimum in $x = -x_0$ und ein lokales Maximum in $x = x_0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Maximum in $x = -2$ und ein lokales Minimum in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

4. Sonderfälle von Extremstellen:

(a) Die grafische Darstellung der Funktion $f_1(x) = x^4$ ist

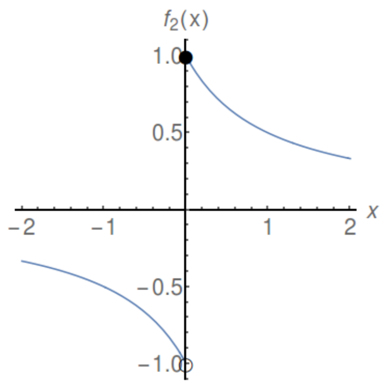


Die erste Ableitung ist $f_1'(x) = 4x^3$, und es gelten $f_1'(x) < 0$, $x < 0$, und $f_1'(x) > 0$, $x > 0$. Daher mit dem Kriterium der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$. Die zweite Ableitung ist $f_1''(x) = 12x^2$, und es gilt $f_1''(0) = 0$. Daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt!

(b) Die Funktion (strategisch definiert an der Stelle $x = 0$)

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x)}{1+|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

hat die grafische Darstellung



und besitzt klar ein lokales Maximum in $x = 0$. Die erste Ableitung ist

$$f_2'(x) = \begin{cases} D_x \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ D_x \dfrac{1}{1+x}, & x > 0 \\ \text{nicht stetig} \Rightarrow \text{nicht differenzierbar}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert nicht}, & x = 0 \end{cases}$$

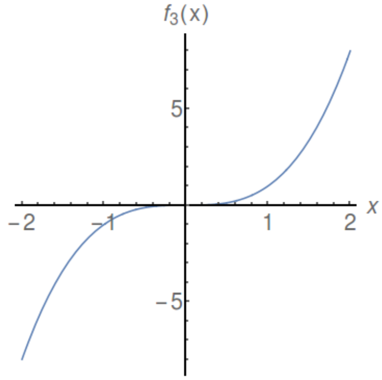
Um eine eindeutige Tangentengerade an einer Stelle zu besitzen, muss eine Kurve an dieser Stelle stetig sein. Also wenn eine Funktion nicht stetig ist, ist sie nicht differenzierbar. Daher ist $f_2(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Weiters gilt $f_2'(x) < 0$, $x \neq 0$, und daher mit dem Kriterium der ersten Ableitung kann nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Maximum in $x = 0$ gibt.

Da die Funktion in $x = 0$ nicht differenzierbar ist, ist sie an dieser Stelle nicht zweimal differenzierbar. Sonst ist die zweite Ableitung gegeben durch

$$f_2''(x) = \begin{cases} D_x \dfrac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ D_x \dfrac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert nicht}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^3}, & x < 0 \\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x > 0 \\ \text{existiert nicht}, & x = 0 \end{cases}$$

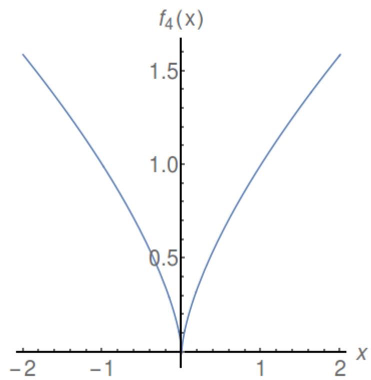
Da $f_3''(0)$ nicht existiert, kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Maximum in $x = 0$ gibt.

(c) Die grafische Darstellung der Funktion $f_3(x) = x^3$ ist



Die erste Ableitung ist $f_3'(x) = 3x^2$, und es gilt $f_3'(0) = 0$. Weiters gilt $f_3'(x) > 0$, $x \neq 0$. Da das Vorzeichen von $f_3'(x)$ durch $x = 0$ sich nicht ändert, gibt es kein lokales Extremum an dieser Stelle.

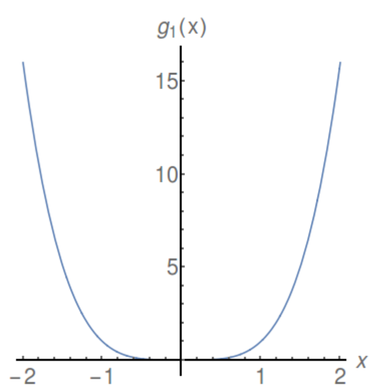
(d) Die grafische Darstellung von $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ist



Die erste Ableitung ist $f_4'(x) = D_x x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $x \neq 0$, d.h. die Funktion ist nicht differenzierbar in $x = 0$. Es gelten aber $f_4'(x) < 0$, $x < 0$, und $f_4'(x) > 0$, $x > 0$. Laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$. Da die Funktion in $x = 0$ nicht differenzierbar ist, ist sie nicht zweimal differenzierbar, d.h. $f''(0)$ existiert nicht, und es kann daher mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt.

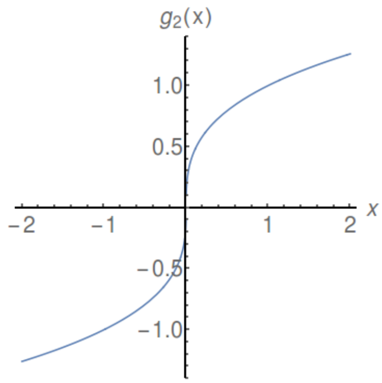
5. Wendepunkte:

(a) Die grafische Darstellung der Funktion $g_1(x) = x^4$ ist



Die erste Ableitung ist $g_1'(x) = 4x^3$ und die zweite Ableitung ist $g_1''(x) = 12x^2$. Es gilt $g_1''(0) = 0$, aber die Stelle $x = 0$ entspricht keinem Wendepunkt, da $g_1''(x) > 0$ für $x \neq 0$ gilt, d.h. das Krümmungsverhalten von $g(x)$ ändert sich durch $x = 0$ nicht.

(b) Die grafische Darstellung der Funktion $g_2(x) = \sqrt[3]{x}$ ist



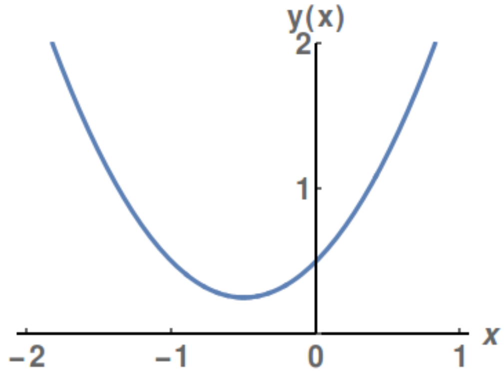
Die erste Ableitung ist $g_2'(x) = D_x x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $x \neq 0$, und die zweite Ableitung ist $g_2''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $x \neq 0$. Die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar und deswegen nicht zweimal differenzierbar. Es gelten $g_2''(x) > 0$, $x < 0$, und $g_2''(x) < 0$, $x > 0$. Da das Krümmungsverhalten sich durch $x = 0$ wechselt, entspricht diese Stelle einem Wendepunkt.

(c) Die folgenden sind alle Wendepunkte der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Blatt 6, Beispiel 4.

i. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

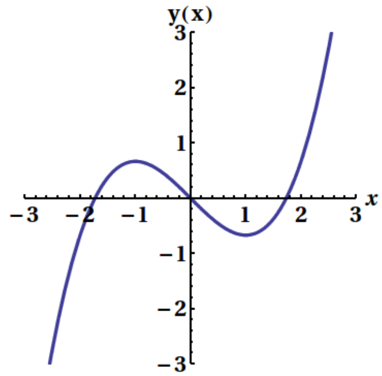
$$y'(x) = 2(x + 1/2), \quad y''(x) = 2 > 0$$

Die Funktion ist konvex überall im $\mathbb{R}$, und das Krümmungsverhalten ändert sich durch keine Stelle. Es gibt daher keine Wendepunkte.

ii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$y''(x) = 2x \begin{cases} < 0, & x \in (-\infty, 0) \\ > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

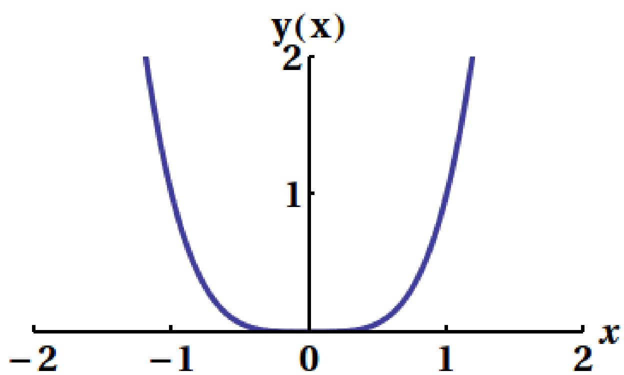
$$y(x) \begin{cases} \text{konkav}, & x \in (-\infty, 0) \\ \text{konvex}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stelle $x = 0$. Diese Stelle entspricht daher einem Wendepunkt.

iii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 4x^3, \quad y''(x) = 12x^2$$

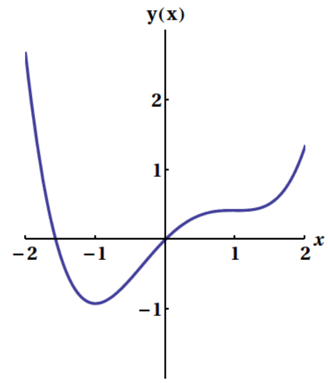
	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$
x^2	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\oplus$
$y(x)$	konvex	konvex

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch keine Stelle. Es gibt daher keine Wendepunkte.

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2/2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$
$$y''(x) = -1 - 2x + 3x^2 = (x-1)(3x+1)$$

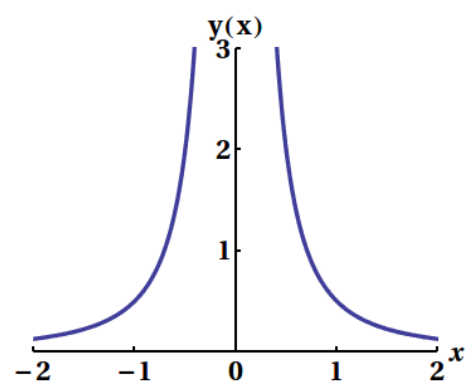
	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, +1)$	$(+1, \infty)$
$(3x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	konvex	konkav	konvex

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen $x = -\frac{1}{3}$ und $x = 1$. Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

ist



Es gelten

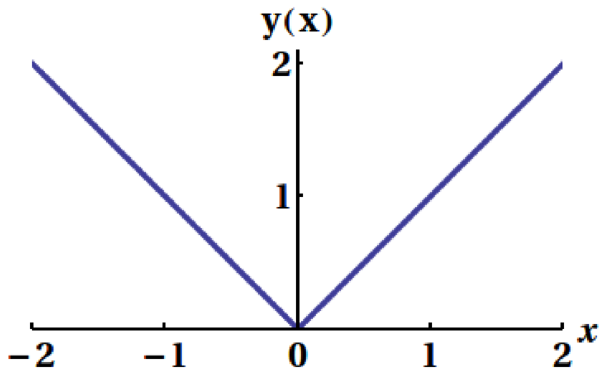
$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$
$$y''(x) = \frac{3}{x^4}, \quad x \neq 0$$
$$y''(x) \begin{cases} > 0, & x \in (-\infty, 0) \\ > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$
$$y(x) \begin{cases} \text{konvex}, & x \in (-\infty, 0) \\ \text{konvex}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Da die Stelle $x = 0$ sich im Definitionsbereich der Funktion nicht befindet, kann diese Stelle sowieso keinem Wendepunkt entsprechen. Außerdem ändert sich das Krümmungsverhalten durch diese Stelle nicht.

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

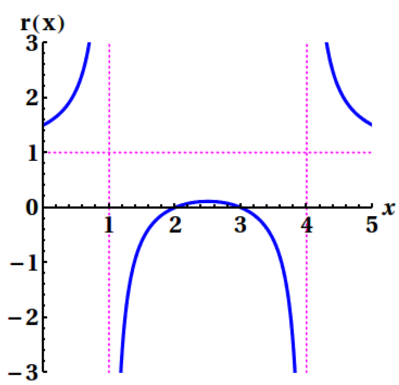
$$y''(x) = 0, \quad x \neq 0$$

Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt oberhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 x_2 < 0$ gilt, aber nicht für beliebig $\{x_1, x_2\}$. Daher ist die Funktion konvex aber nicht streng konvex in D. Es gibt keine Wendepunkte, da das Krümmungsverhalten sich durch keine Stelle ändert.

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$$

ist



Es gelten

$$r'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 4\frac{5/2 - x}{(x-1)^2(x-4)^2}, \quad x \neq 1, 4$$

$$r''(x) = \frac{12(7 - 5x + x^2)}{(x^2 - 5x + 4)^3} = 12\frac{(x - 5/2)^2 + 3/4}{(x-1)^3(x-4)^3}, \quad x \neq 1, 4$$

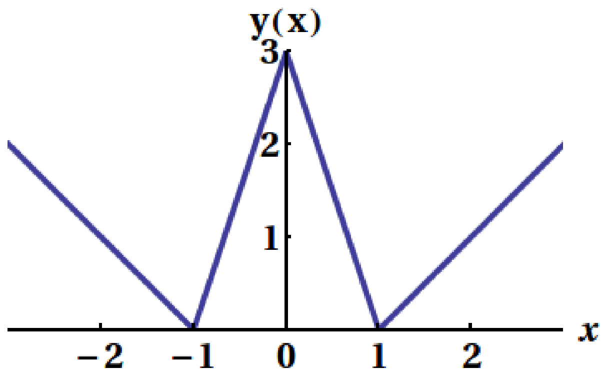
	$(-\infty,+1)$	$(+1,+4)$	$(+4,+\infty)$
$(x-1)^3$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-4)^3$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$(x-5/2)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$r(x)$	konvex	konkav	konvex

Obwohl das Krümmungsverhalten sich durch die Stellen $x = 1, 4$ ändert, befinden sich diese Stellen im Definitionsbereich nicht. Daher gibt es keine Wendepunkte.

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\text{sign}(x+1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x-1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

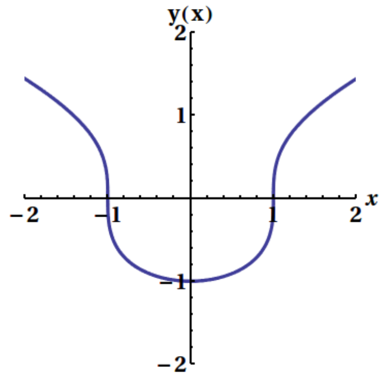
$$y''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt oberhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 < -1$ und $x_2 \in (-1, 0]$ gelten, aber nicht für beliebig $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$. Daher ist die Funktion (nicht streng) konvex in $(-\infty, 0]$. Ähnlich ist die Funktion (nicht streng) konvex in $[0, +\infty)$. Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt unterhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 \in [-1, 0)$ und $x_2 \in (0, +1]$ gelten, aber nicht für beliebig $x_1, x_2 \in [-1, +1]$. Daher ist die Funktion (nicht streng) konkav in $[-1, +1]$. Es gibt keine Wendepunkte, da das Krümmungsverhalten sich durch keine Stelle ändert.

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

$$y''(x) = \frac{2(x^2+3)}{9(x^2-1)^{\frac{5}{3}}} = \frac{2(x^2+3)}{9(x+1)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{5}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

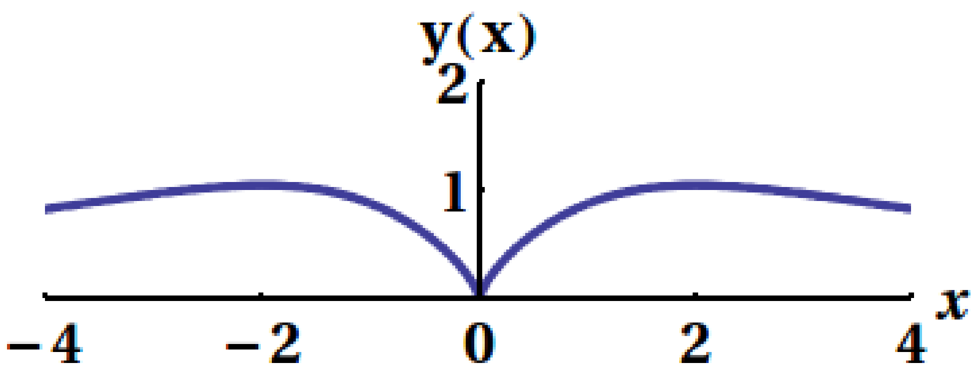
	$(-\infty,-1)$	$(-1,+1)$	$(+1,+\infty)$
$(1+x)^{\frac{5}{3}}$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(1-x)^{\frac{5}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
(x^2+3)	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
$y(x)$	konkav	konvex	konkav

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen $x = -1$ und $x = +1$. Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8+x^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2} = \frac{32}{3(8+x^2)^2}\,\frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

und mit $\{\frac{92\pm\sqrt{92^2-4\cdot 7\cdot(-32)}}{2\cdot 7}\} = \{-\tilde{x}^2, \hat{x}^2\}$, $\tilde{x}^2 \approx 0.339$, $\hat{x} \approx 3.67$,

$$y''(x) = \frac{32(7x^4 - 92x^2 - 32)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^3} = \underbrace{\left[\frac{7\cdot 32(x^2+\tilde{x}^2)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^2}\right]}_{=A}(x+\hat{x})(x-\hat{x}), \quad x \neq 0$$

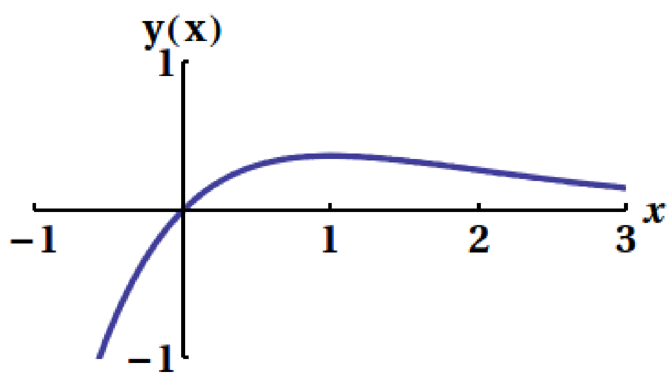
	$(-\infty, -\hat{x})$	$(-\hat{x}, 0)$	$(0, \hat{x})$	$(\hat{x}, \infty)$
$(x+\hat{x})$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-\hat{x})$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
A	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	konvex	konkav	konkav	konvex

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen $x = x_1$ und $x = x_2$. Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkte.

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = e^{-x}(1-x)$$

$$y''(x) = e^{-x}(x-2)$$

$$y''(x) \begin{cases} < 0, & x < 2 \\ > 0, & x > 2 \end{cases}$$

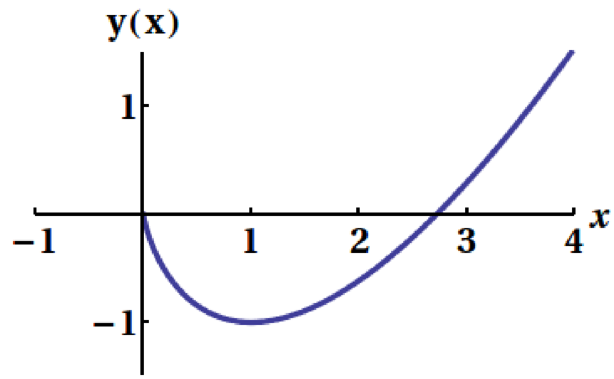
$$y(x) \begin{cases} \text{konkav}, & x < 2 \\ \text{konvex}, & x > 2 \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stelle $x = 2$. Die Stelle entspricht daher einem Wendepunkt.

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x\ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$

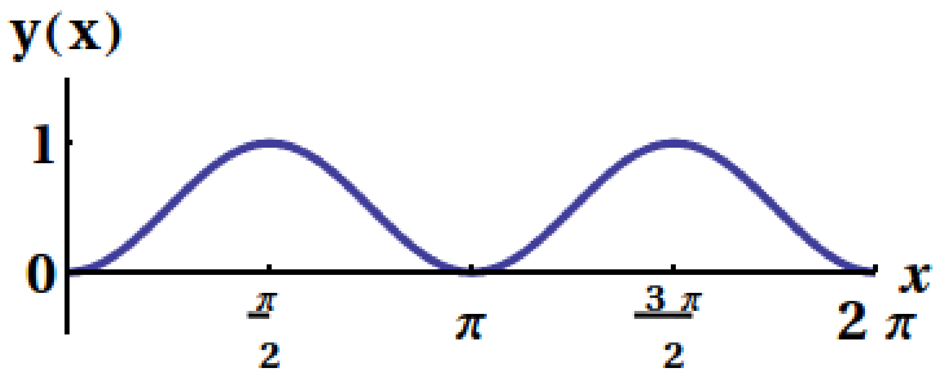
$$y''(x) = \frac{1}{x} > 0, \quad x > 0$$

Die Funktion ist konvex für $x > 0$. Es gibt keine Wendepunkte, da das Krümmungsverhalten sich durch keine Stelle ändert.

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$y''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2\cos(2x)$$

$$y''(x) = \begin{cases} = \ 0, & x = \frac{2k+1}{4}\pi, & & k = 0, 1, 2, 3 \\ = \sqrt{2}, & x = \frac{1}{8}\pi & \Rightarrow \ > 0, & x \in (\frac{0}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi) \\ = -2, & x = \frac{1}{2}\pi & \Rightarrow \ < 0, & x \in (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \\ = +2, & x = \pi & \Rightarrow \ > 0, & x \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi) \\ = -2, & x = \frac{3}{2}\pi & \Rightarrow \ < 0, & x \in (\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \\ = \sqrt{2}, & x = \frac{15}{8}\pi & \Rightarrow \ > 0, & x \in (\frac{7}{4}\pi, \frac{8}{4}\pi) \end{cases}$$

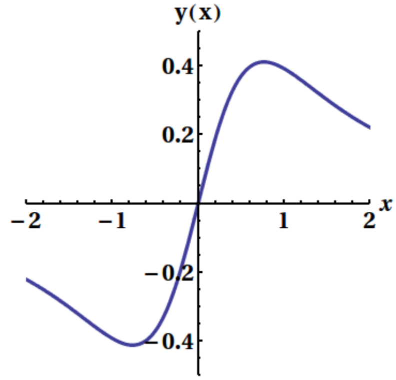
$$y(x) \begin{cases} \text{konvex}, & x \in (0, \frac{1}{4}\pi) \cup (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi, \frac{8}{4}\pi) \\ \text{konkav}, & x \in (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen $x = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten mit $x_1 \approx 1.330$ durch das Bisektionsverfahren gefunden (Blatt 5, Beispiel 3b),

$$y'(x) = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$y''(x) = \frac{(6x^2-2)\tan^{-1}(x) - 6x}{(1+x^2)^3}, \quad y''(x_1) = 0$$

$$y''(x) \begin{cases} = \quad 0, & x = 0, \pm x_1 \\ \approx -0.1, & x = -2 \quad \Rightarrow \; < 0, \quad x \in (-\infty, -x_1) \\ \approx +0.6, & x = -1 \quad \Rightarrow \; > 0, \quad x \in (-x_1, 0) \\ \approx -0.6, & x = +1 \quad \Rightarrow \; < 0, \quad x \in (0, x_1) \\ \approx +0.1, & x = +2 \quad \Rightarrow \; > 0, \quad x \in (x_1, +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) \begin{cases} \text{konkav}, & x \in (-\infty, -x_1) \cup (0, x_1) \\ \text{konvex}, & x \in (-x_1, 0) \cup (x_1, +\infty) \end{cases}$$

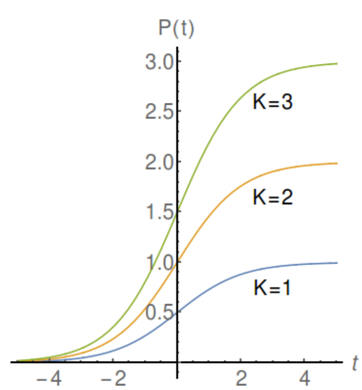
Die Stellen $x = -x_1$ und $x = +x_1$ entsprechen jeweils einem Wendepunkt, da das Krümmungsverhalten sich durch diese Stellen ändert.

6. Logistisches Wachstum:

(a) Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{K}{1+e^{-t}}, \quad K = 1, 2, 3$$

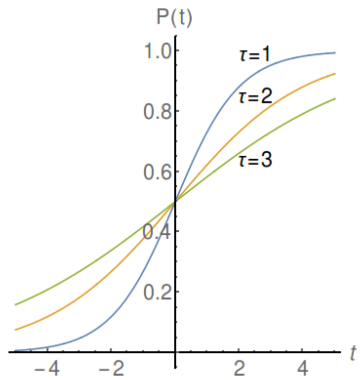
ist



So sieht man, K (die Kapazität) entspricht einer waagerechten Asymptote. Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\tau}}, \quad \tau = 1, 2, 3$$

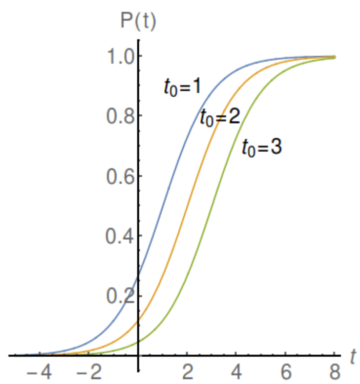
ist



So sieht man, die Steigung im Wendepunkt wird seichter, wenn τ (die Zeitskala) größer wird. Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{1}{1+e^{-(t-t_0)}}, \quad t_0 = 1, 2, 3$$

ist



So sieht man, der Wendepunkt $(t_0, K/2)$ wird verschoben, wenn t_0 verschoben wird.

(b) Für die Funktion

$$P(t) = \frac{K}{1+e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

gelten

$$P'(t) = KD_t(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^{-1} = -K(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^{-2}D_t(1+e^{-(t-t_0)/\tau})$$

$$= \frac{-K}{(1+e^{-(t-t_0)/\tau})}e^{-(t-t_0)/\tau}D_t(-(t-t_0)/\tau) = \frac{Ke^{-(t-t_0)/\tau}}{\tau(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^2}$$

und

$$P''(t) = \frac{K}{\tau}\frac{(e^{-(t-t_0)/\tau})'(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^2 - e^{-(t-t_0)/\tau}((1+e^{-(t-t_0)/\tau})^2)'}{(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^4}$$

$$= \frac{K}{\tau}\frac{e^{-(t-t_0)/\tau}(-1/\tau)(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^2 - e^{-(t-t_0)/\tau}2(1+e^{-(t-t_0)/\tau})e^{-(t-t_0)/\tau}(-1/\tau)}{(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^4}$$

$$= \frac{K}{\tau^2}\frac{-e^{-(t-t_0)/\tau} - e^{-2(t-t_0)/\tau} + 2e^{-2(t-t_0)/\tau}}{(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^3} = \frac{K}{\tau^2}\frac{e^{-2(t-t_0)/\tau} - e^{-(t-t_0)/\tau}}{(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^3}$$

oder

$$P''(t) = \frac{Ke^{-(t-t_0)/\tau}}{\tau^2(1+e^{-(t-t_0)/\tau})^3}(e^{-(t-t_0)/\tau} - 1) \quad \begin{cases} > 0, & t < t_0 \\ < 0, & t > t_0 \end{cases}$$

und daher ist $(t_0, P(t_0)) = (t_0, K/2)$ ein Wendepunkt.

(c) Mit den Daten $P(0) = 1$, $P(\ln(2)) = 4/3$ und $P(\ln(4)) = 8/5$ ergibt sich das Gleichungssystem für die unbekannten Parameter (K, τ, t_0),

$$\begin{aligned} 1 = P(0) &= \frac{K}{1+e^{-(0-t_0)/\tau}} \\ 4/3 = P(\ln(2)) &= \frac{K}{1+e^{-(\ln(2)-t_0)/\tau}} \\ 8/5 = P(\ln(4)) &= \frac{K}{1+e^{-(\ln(4)-t_0)/\tau}} \end{aligned}$$

Die jeweiligen Nenner können so vereinfacht werden,

$$\begin{aligned} e^{-(0-t_0)/\tau} &= e^{t_0/\tau} \\ e^{-(\ln(2)-t_0)/\tau} &= e^{\ln(2^{-1/\tau})}e^{t_0/\tau} = 2^{-1/\tau}e^{t_0/\tau} \\ e^{-(\ln(4)-t_0)/\tau} &= e^{\ln(4^{-1/\tau})}e^{t_0/\tau} = 2^{-2/\tau}e^{t_0/\tau} \end{aligned}$$

Man löst nach K im Gleichungssystem auf und bekommt

$$K = 1 + e^{t_0/\tau} = \tfrac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau}e^{t_0/\tau}) = \tfrac{8}{5}(1 + 2^{-2/\tau}e^{t_0/\tau})$$

Aus der Gleichung $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau}e^{t_0/\tau})$ folgt

$$(1 - \tfrac{4}{3}2^{-1/\tau})e^{t_0/\tau} = \tfrac{4}{3} - 1 = \tfrac{1}{3} \quad \text{oder} \quad e^{t_0/\tau} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{3}2^{-1/\tau}}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{1}{3 - 4\cdot 2^{-1/\tau}}$$

Aus der Gleichung $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{8}{5}(1 + 2^{-2/\tau}e^{t_0/\tau})$ folgt

$$(1 - \tfrac{8}{5}2^{-2/\tau})e^{t_0/\tau} = \tfrac{8}{5} - 1 = \tfrac{3}{5} \quad \text{oder} \quad e^{t_0/\tau} = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{8}{5}2^{-2/\tau}}\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{3}{5 - 8\cdot 2^{-2/\tau}}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen

$$e^{t_0/\tau} = \frac{1}{3 - 4\cdot 2^{-1/\tau}} = \frac{3}{5 - 8\cdot 2^{-2/\tau}}$$

folgt mit $x = 2^{-1/\tau}$,

$$\frac{1}{3-4x} = \frac{3}{5-8x^2} \quad \text{oder} \quad 8x^2 - 12x + 4 = 0 \quad \text{d.h.} \quad x = \tfrac{1}{2} \text{ oder } x = 1$$

Die Lösung $x = 1 = 2^{-1/\tau}$ kann ausgeschlossen werden, da der Wert $\tau = +\infty$ sich ergeben würde. Die Lösung $x = \frac{1}{2} = 2^{-1/\tau}$ entspricht dem Wert

$$\boxed{\tau = 1}$$

Mit $\tau = 1$ folgt aus der Gleichung $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau}e^{t_0/\tau})$,

$$\tfrac{1}{3}e^{t_0} = (1 - \tfrac{4}{3}2^{-1})e^{t_0} = \tfrac{4}{3} - 1 = \tfrac{1}{3} \quad \text{oder} \quad e^{t_0} = 1 \quad \text{oder} \quad \boxed{t_0 = 0}$$

Mit $\tau = 1$ und $t_0 = 0$ folgt aus der Gleichung $K = 1 + e^{t_0/\tau}$ der Wert $\boxed{K = 2}$.