

# Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

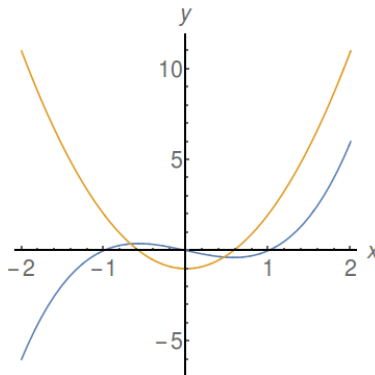
## Lösungen der Beispiele des 6. Übungsblatts

1. Grafische Beziehung zwischen Funktion und Ableitung:

(a) Die Ableitung der Funktion  $f(x) = x^3 - x$  ist

$$f'(x) = D_x(x^3 - x) = 3x^2 - 1$$

(b) Die grafische Darstellung von  $f(x)$  und  $f'(x)$  ist



Man merkt,  $f'(x)$  ist positiv oder negativ, wenn die Steigung von  $f(x)$  positiv bzw. negativ ist. Weiters ist  $|f'(x)|$  desto größer, je steiler die Tangentengerade von  $f(x)$  ist.

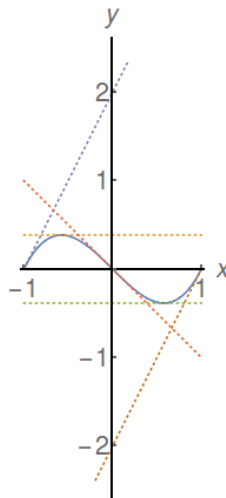
(c) Die Tangentengerade durch einen beliebigen Punkt  $(x_0, f(x_0))$  ist

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$$

und insbesondere

für	$(-1, f(-1))$	:	$(y - 0) = 2(x + 1)$	oder	$y = 2x + 2$
für	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f(-\frac{1}{\sqrt{3}}))$	:	$(y - \frac{2}{3\sqrt{3}}) = 0(x + \frac{1}{\sqrt{3}})$	oder	$y = \frac{2}{3\sqrt{3}}$
für	$(0, f(0))$	:	$(y - 0) = -(x - 0)$	oder	$y = -x$
für	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, f(\frac{1}{\sqrt{3}}))$	:	$(y + \frac{2}{3\sqrt{3}}) = 0(x - \frac{1}{\sqrt{3}})$	oder	$y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$
für	$(1, f(1))$	:	$(y - 0) = 2(x - 1)$	oder	$y = 2x - 2$

(d) Die grafische Darstellung der Funktion gemeinsam mit diesen Tangentengeraden ist:



2. Ableitungen von log und exp-Funktionen:

(a) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_1(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \ln(x), \quad v'(x) = \frac{1}{x}, \quad f_1'(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i.  $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \frac{1}{x}$

ii.  $u(x) = xe^x, \quad u'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = \frac{(1+x)e^x}{xe^x} = \frac{1}{x} + 1$

iii.  $u(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 + e^x}, \quad u'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + e^x) - (1 + \ln(x))e^x}{(1 + e^x)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{\frac{1}{x}(1 + e^x) - (1 + \ln(x))e^x}{(1 + e^x)^2} \bigg/ \left( \frac{1 + \ln(x)}{1 + e^x} \right) = \frac{(1 + e^x) - xe^x(1 + \ln(x))}{x(1 + \ln(x))(1 + e^x)}$$

iv.  $u(x) = \ln(1 + x^2), \quad u'(x) = \frac{(1 + x^2)'}{(1 + x^2)} = \frac{2x}{1 + x^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1 + x^2} \bigg/ \ln(1 + x^2) = \frac{2x}{(1 + x^2) \ln(1 + x^2)}$$

(b) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_2(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \log_2(x), \quad v'(x) = D_x \log_2(e) \ln(x) = \log_2(e) \frac{1}{x},$$

$$f_2'(x) = v'(u(x))u'(x) = \log_2(e) \frac{u'(x)}{u(x)}$$

wobei die Regel der Logarithmusfunktionen

$$\log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_b(x) \log_a(b)$$

verwendet worden ist. Anhand der Lösungen des letzten Teils ergeben sich hier ähnliche Lösungen einfach durch Multiplikation mit  $\log_2(e)$ ,

i.  $u(x) = x, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e) \frac{1}{x}$

ii.  $u(x) = xe^x, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e) \left( \frac{1}{x} + 1 \right)$

iii.  $u(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 + e^x}, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e) \frac{(1 + e^x) - xe^x(1 + \ln(x))}{x(1 + \ln(x))(1 + e^x)}$

iv.  $u(x) = \ln(1 + x^2), \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e) \frac{2x}{(1 + x^2) \ln(1 + x^2)}$

(c) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_3(x) = v(u(x)), \quad v(x) = e^x, \quad v'(x) = e^x, \quad f_3'(x) = v'(u(x))u'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i.  $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = e^x$

ii.  $u(x) = xe^x, \quad u'(x) = (1+x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = (1+x)e^x e^{xe^x}$

$$\text{iii. } u(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 + e^x}, \quad u'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + e^x) - (1 + \ln(x))e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \frac{\frac{1}{x}(1 + e^x) - (1 + \ln(x))e^x}{(1 + e^x)^2} \exp\left(\frac{1 + \ln(x)}{1 + e^x}\right)$$

$$\text{iv. } u(x) = \ln(1 + x^2), \quad u'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1 + x^2} \exp(\ln(1 + x^2)) = \frac{2x}{1 + x^2}(1 + x^2) = 2x$$

(d) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_4(x) = v(u(x)), \quad v(x) = 2^x = \exp_2(x)$$

$$v'(x) = D_x 2^x = D_x e^{\ln(2^x)} = D_x e^{x \ln(2)} = \ln(2) e^{x \ln(2)} = \ln(2) e^{\ln(2^x)} = \ln(2) 2^x$$

$$f_4'(x) = v'(u(x))u'(x) = \ln(2)u'(x)2^{u(x)}$$

wobei die Regeln der Logarithmusfunktionen verwendet worden sind. Anhand der Lösungen des letzten Teils ergeben sich hier ähnliche Lösungen durch Multiplikation mit  $\ln(2)$ ,

$$\text{i. } u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x 2^x = \ln(2)2^x$$

$$\text{ii. } u(x) = xe^x, \quad u'(x) = (1 + x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = \ln(2)(1 + x)e^x 2^{xe^x}$$

$$\text{iii. } u(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 + e^x}, \quad u'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + e^x) - (1 + \ln(x))e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \ln(2) \left( \frac{\frac{1}{x}(1 + e^x) - (1 + \ln(x))e^x}{(1 + e^x)^2} \right) \exp_2\left(\frac{1 + \ln(x)}{1 + e^x}\right)$$

$$\text{iv. } u(x) = \ln(1 + x^2), \quad u'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \ln(2) \frac{2x}{1 + x^2} \exp_2(\ln(1 + x^2))$$

### 3. Ableitungen von Winkelfunktionen und ihrer Umkehrfunktionen:

(a) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_1(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \sin(x), \quad v'(x) = \cos(x), \quad g_1'(x) = v'(u(x))u'(x) = \cos(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

$$\text{i. } u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \cos(x)$$

$$\text{ii. } u(x) = x \sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$$

$$D_x v(u(x)) = (\sin(x) + x \cos(x)) \cos(x \sin(x))$$

$$\text{iii. } u(x) = \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$u'(x) = \frac{\cos(x)(1 + \cos(x)) - (1 + \sin(x))(-\sin(x))}{(1 + \cos(x))^2}$$

$$= \frac{(\cos^2(x) + \sin^2(x))_{=1} + \cos(x) + \sin(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} \cos\left(\frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } u(x) &= \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \\ D_x v(u(x)) &= \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \cos(\tan^{-1}(1+x^2)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}} \\ &= \frac{2x}{(1+(1+x^2)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(b) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_2(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \cos(x), \quad v'(x) = -\sin(x), \quad g_2'(x) = v'(u(x))u'(x) = -\sin(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

$$\begin{aligned} \text{i. } u(x) &= x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = -\sin(x) \\ \text{ii. } u(x) &= x \sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x \cos(x) \\ D_x v(u(x)) &= -(\sin(x) + x \cos(x)) \sin(x \sin(x)) \\ \text{iii. } u(x) &= \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}, \quad u'(x) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} \\ D_x v(u(x)) &= -\frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} \sin\left(\frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}\right) \\ \text{iv. } u(x) &= \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x v(u(x)) &= -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \sin(\tan^{-1}(1+x^2)) = -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}} \\ &= -\frac{2x(1+x^2)}{(1+(1+x^2)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(c) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_3(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \tan(x), \quad v'(x) = \sec^2(x), \quad g_3'(x) = v'(u(x))u'(x) = \sec^2(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

$$\begin{aligned} \text{i. } u(x) &= x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \sec^2(x) \\ \text{ii. } u(x) &= x \sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x \cos(x) \\ D_x v(u(x)) &= (\sin(x) + x \cos(x)) \sec^2(x \sin(x)) \\ \text{iii. } u(x) &= \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}, \quad u'(x) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} \\ D_x v(u(x)) &= \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} \sec^2\left(\frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}\right) \\ \text{iv. } u(x) &= \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \sec^2(\tan^{-1}(1+x^2)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} (1+(1+x^2)^2) = 2x$$

(d) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_4(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \sin^{-1}(x), \quad v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'_4(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

$$\text{i. } u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{ii. } u(x) = x \sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x \cos(x), \quad D_x v(u(x)) = \frac{\sin(x) + x \cos(x)}{\sqrt{1-(x \sin(x))^2}}$$

$$\text{iii. } u(x) = \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}, \quad u'(x) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} \bigg/ \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}\right)^2}$$

$$\text{iv. } u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \bigg/ \sqrt{1 - (\tan^{-1}(1+x^2))^2}$$

(e) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_5(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \cos^{-1}(x), \quad v'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'_5(x) = v'(u(x))u'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

$$\text{i. } u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{ii. } u(x) = x \sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x \cos(x), \quad D_x v(u(x)) = -\frac{\sin(x) + x \cos(x)}{\sqrt{1-(x \sin(x))^2}}$$

$$\text{iii. } u(x) = \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}, \quad u'(x) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2}$$

$$D_x v(u(x)) = -\frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} \bigg/ \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}\right)^2}$$

$$\text{iv. } u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$$

$$D_x v(u(x)) = -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \bigg/ \sqrt{1 - (\tan^{-1}(1+x^2))^2}$$

(f) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_5(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \tan^{-1}(x), \quad v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'_5(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

$$\text{i. } u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

ii.  $u(x) = x \sin(x)$ ,  $u'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$ ,  $D_x v(u(x)) = \frac{\sin(x) + x \cos(x)}{1 + (x \sin(x))^2}$

iii.  $u(x) = \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}$ ,  $u'(x) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2}$

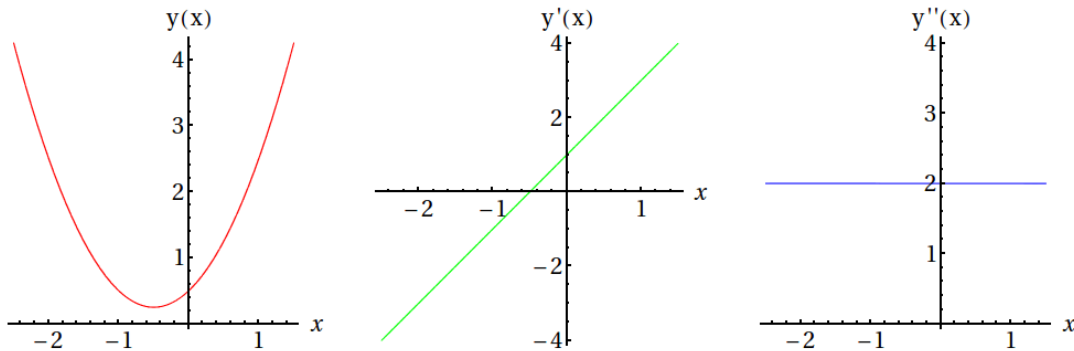
$$D_x v(u(x)) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} \bigg/ \left( 1 + \left( \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)} \right)^2 \right) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{3 + 2 \sin(x) + 2 \cos(x)}$$

iv.  $u(x) = \tan^{-1}(1 + x^2)$ ,  $u'(x) = \frac{2x}{1 + (1 + x^2)^2}$

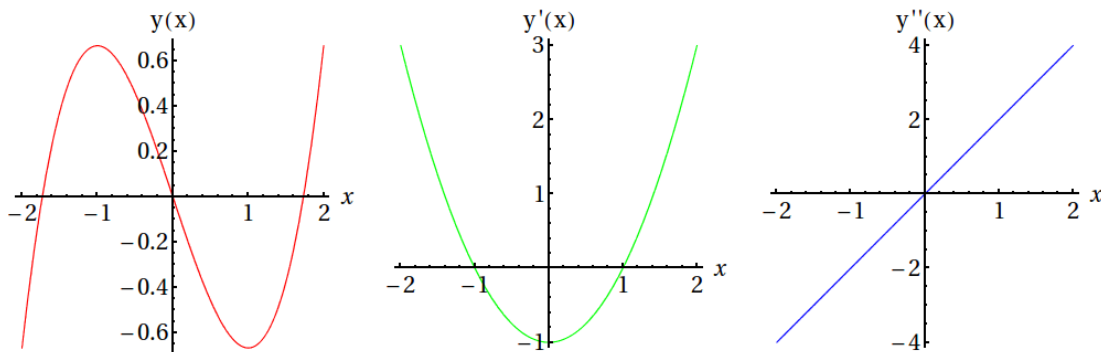
$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1 + (1 + x^2)^2} \bigg/ (1 + (\tan^{-1}(1 + x^2))^2)$$

4. Vorbereitung auf die Monotonie und Krümmung:

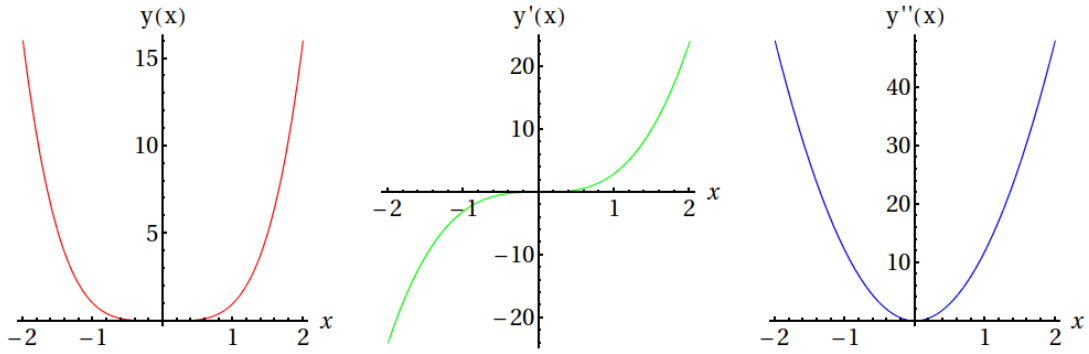
(a)  $y_1(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ ,  $y_1'(x) = 2x + 1$ ,  $y_1''(x) = 2$ , grafische Darstellung:



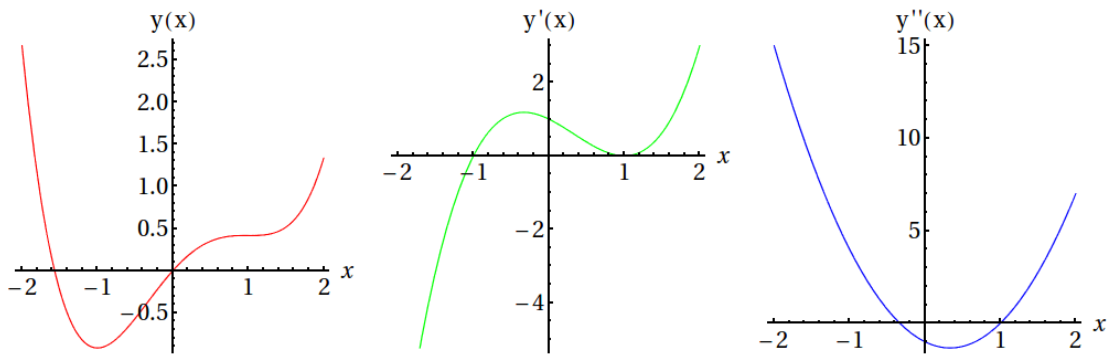
(b)  $y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ ,  $y_2'(x) = x^2 - 1$ ,  $y_2''(x) = 2x$ , grafische Darstellung:



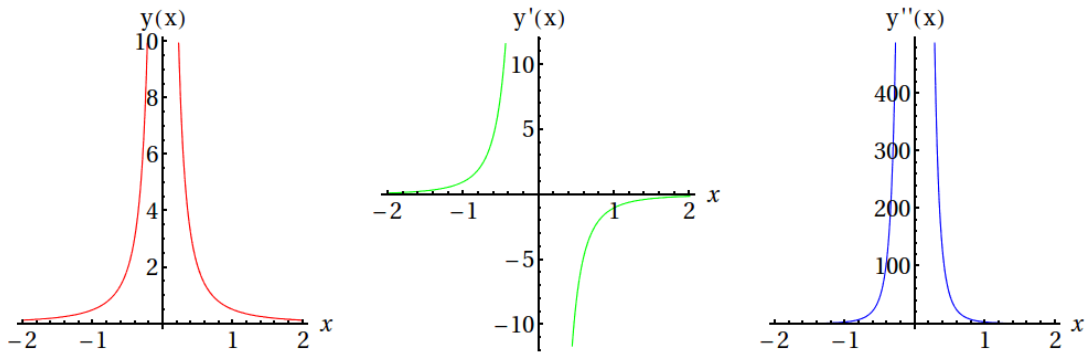
(c)  $y_3(x) = x^4$ ,  $y_3'(x) = 4x^3$ ,  $y_3''(x) = 12x^2$ , grafische Darstellung:



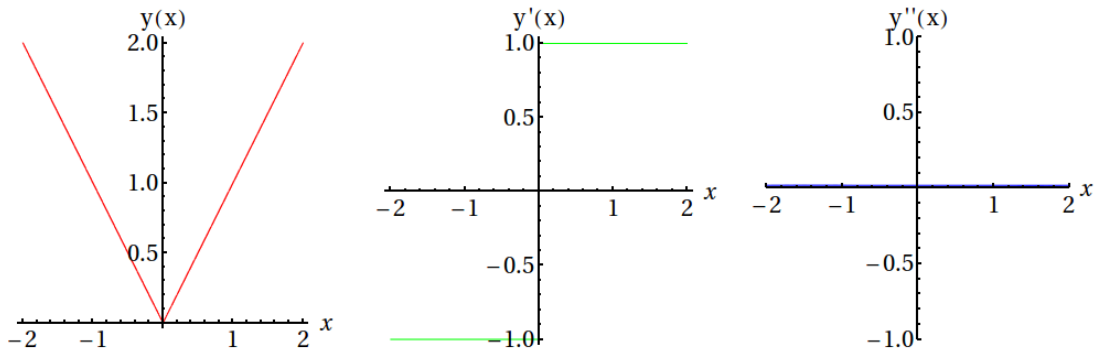
- (d)  $y_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ ,  $y'_4(x) = 1 - x - x^2 + x^3$ ,  $y''_4(x) = -1 - 2x + 3x^2$ , grafische Darstellung:



- (e)  $y_5(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$ ,  $y'_5(x) = -x^{-3}$ ,  $y''_5(x) = 3x^{-4}$ , grafische Darstellung:



- (f)  $y_6(x) = |x|$ ,  $y'_6(x) = \text{sign}(x)$ ,  $x \neq 0$ , (Seite 79 im Skriptum),  $y''_6(x) = 0$ ,  $x \neq 0$ , grafische Darstellung:

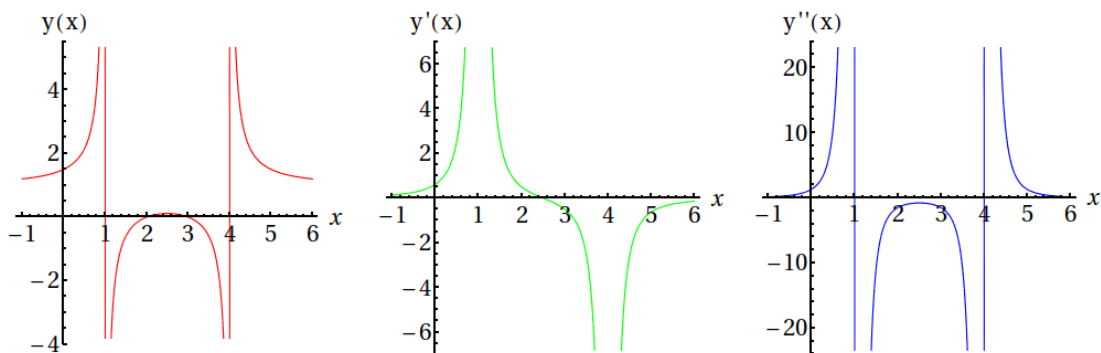


(g)  $y_7(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$ ,

$$y_7'(x) = \frac{(2x - 5)(x^2 - 5x + 4) - (x^2 - 5x + 6)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2},$$

$$y_7''(x) = \frac{-4(x^2 - 5x + 4)^2 - (10 - 4x)2(x^2 - 5x + 4)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^4} = \frac{12(7 - 5x + x^2)}{(4 - 5x + x^2)^3},$$

grafische Darstellung:



(h) Für  $v(x) = |x|$  und  $v'(x) = \text{sign}(x)$ ,  $x \neq 0$ , (Seite 79 im Skriptum) folgt mit der Kettenregel

$$D_x v(u(x)) = v'(u(x)) = \text{sign}(u(x))u'(x), \quad u(x) \neq 0$$

d.h. die Ableitung existiert nicht, wo  $u(x) = 0$  gilt. Insbesondere gelten

$$D_x 2|x + 1| = 2D_x|x + 1| = 2\text{sign}(x + 1), \quad x + 1 \neq 0$$

$$D_x 3|x| = 3D_x|x| = 3\text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

und

$$D_x 2|x - 1| = 2D_x|x - 1| = 2\text{sign}(x - 1), \quad x - 1 \neq 0$$

Daher für  $y_8(x) = 2|x + 1| - 3|x| + 2|x - 1| - 1$  folgt

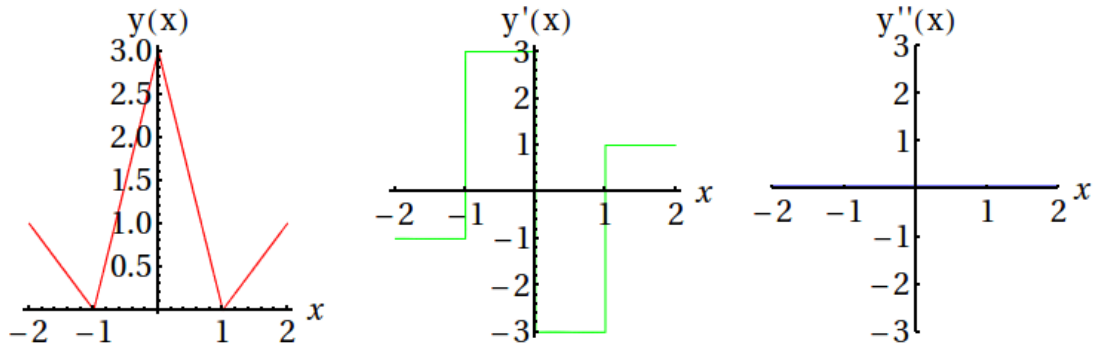
$$\begin{aligned} y_8'(x) &= 2D_x|x + 1| - 3D_x|x| + 2D_x|x - 1| - D_x 1 \\ &= 2\text{sign}(x + 1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x - 1), \quad x \neq -1, 0, +1 \end{aligned}$$

d.h. die Ableitung existiert nicht in  $x = -1, 0, +1$ . Da  $y_8'(x)$  in den Teilintervallen  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$  und  $(0, +1)$  konstant ist, folgt

$$y_8''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

Die grafische Darstellung ist



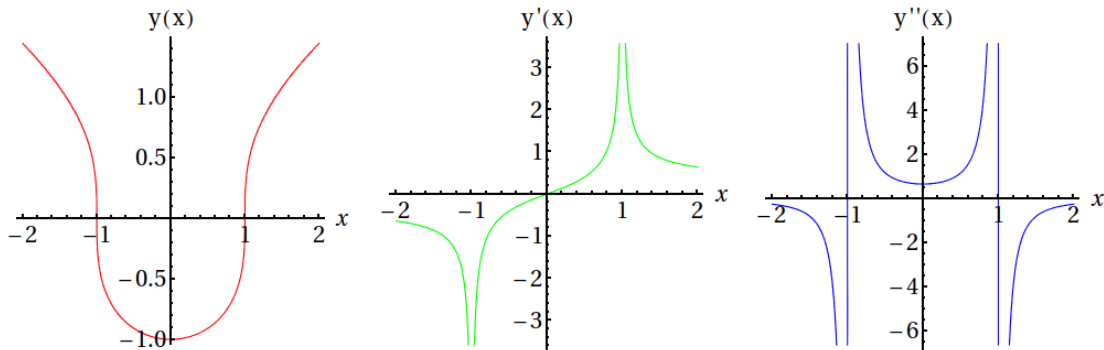


(i)  $y_9(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ ,

$$y'_9(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \frac{2x}{3(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y''_9(x) = \frac{2 \cdot 3(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - (2x) \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}(2x)}{9(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{2(x^2 + 3)}{9(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}$$

grafische Darstellung:



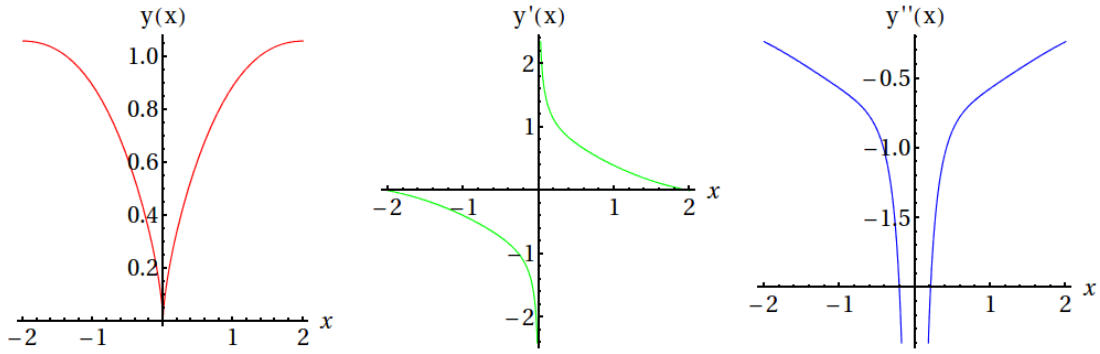
(j)  $y_{10}(x) = 8x^{\frac{2}{3}}/(8 + x^2)$ ,

$$y'_{10}(x) = \frac{8 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(8 + x^2) - 8x^{\frac{2}{3}}(2x)}{(8 + x^2)^2} = \frac{32(4 - x^2)}{3x^{\frac{1}{3}}(8 + x^2)^2}$$

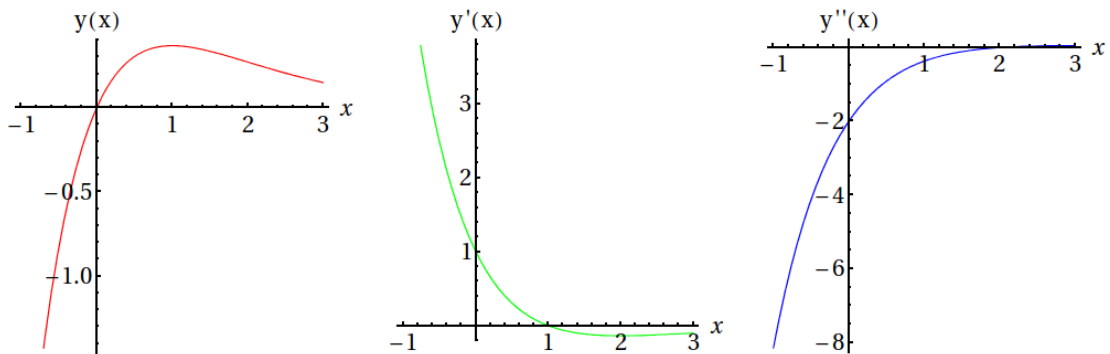
$$y''_{10}(x) = \frac{-32 \cdot 2x(3x^{\frac{1}{3}}(8 + x^2)^2) - 32(4 - x^2)[3 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8 + x^2)^2 + 3x^{\frac{1}{3}}2(8 + x^2)(2x)]}{9x^{\frac{2}{3}}(8 + x^2)^4}$$

$$= \frac{32(7x^4 - 92x^2 - 32)}{9x^{\frac{4}{3}}(8 + x^2)^3}$$

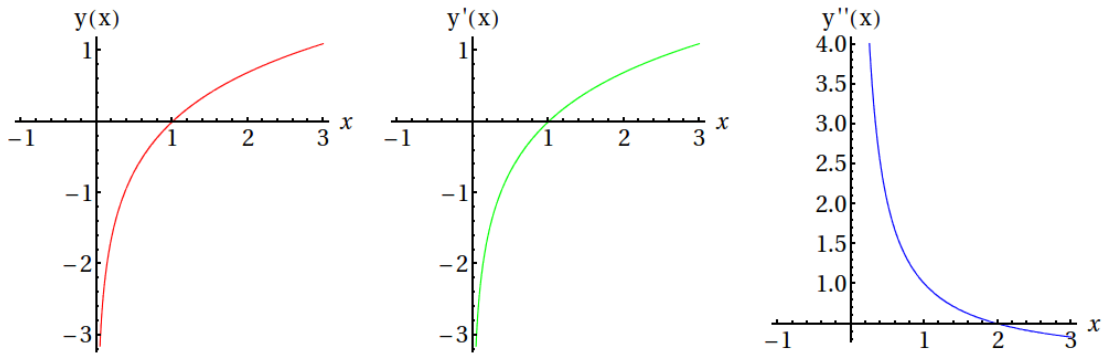
grafische Darstellung:



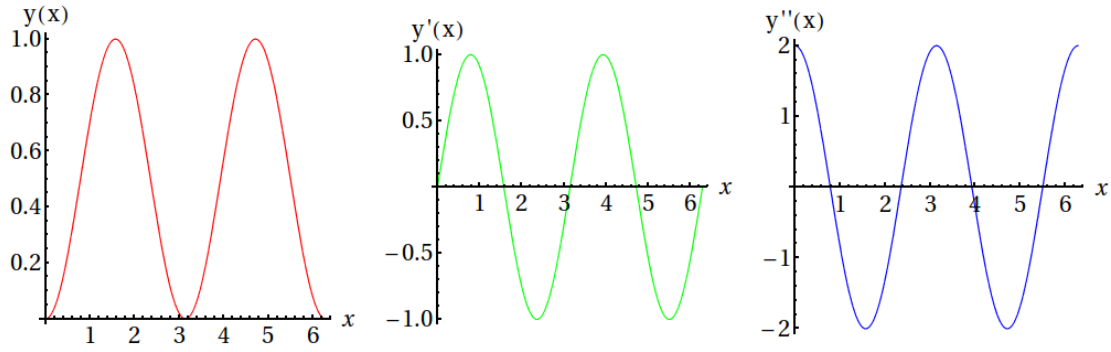
- (k)  $y_{11}(x) = xe^{-x}$ ,  $y'_{11}(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ ,  $y''_{11}(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$ , grafische Darstellung:



- (l)  $y_{12}(x) = x \ln(x) - x$ ,  $y'_{12}(x) = \ln(x) + x \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$ ,  $y''_{12}(x) = 1/x$ , grafische Darstellung:



- (m)  $y_{13}(x) = \sin^2(x)$ ,  $y'_{13}(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ ,  $y''_{13}(x) = 2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x)$ , grafische Darstellung:



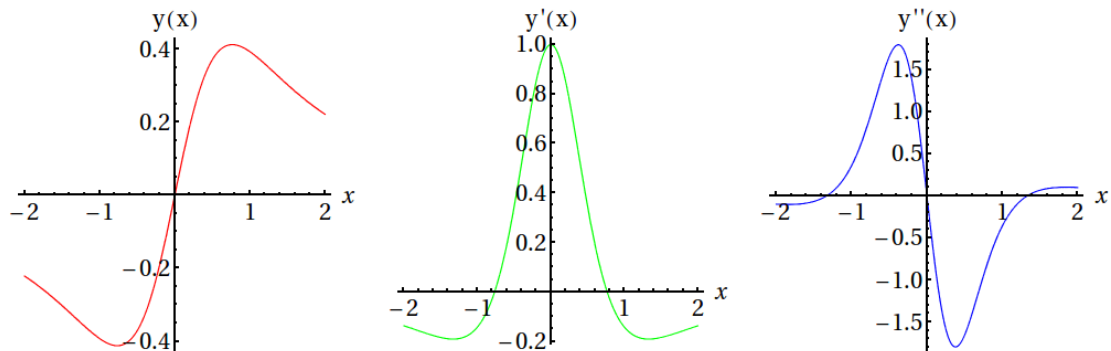
(n)  $y_{14}(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2)$ ,

$$y'_{14}(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2) - \tan^{-1}(x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - 2x \tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$y''_{14}(x) = \frac{(-2 \tan^{-1}(x) - 2x \frac{1}{1+x^2})(1+x^2)^2 - (1 - 2x \tan^{-1}(x))2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

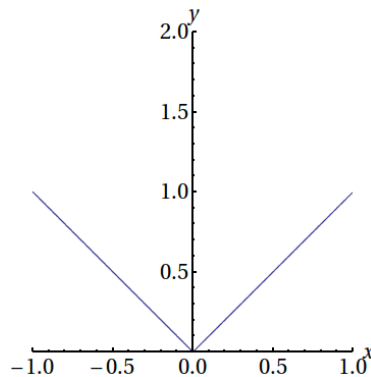
$$= \frac{-6x + (6x^2 - 2) \tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^3}$$

grafische Darstellung:



5. Differenzierbarkeit:

(a) Die grafische Darstellung von  $z_1(x) = |x|$  ist



und ein Knick ist in  $(0, 0)$  ersichtlich. Die Ableitung ist

$$z_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_1(x+h) - z_1(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

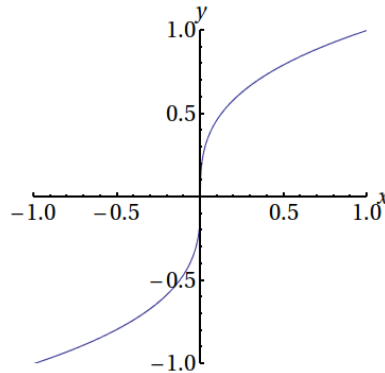
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{+(x+h) - x}{h}, & x > 0 \\ \frac{-(x+h) + x}{h}, & x < 0 \\ \frac{|h|}{h}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ ?, & x = 0 \end{cases} = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

d.h.  $z_1'(x) = \text{sign}(x)$  gilt nur für  $x \neq 0$ . Die Ableitung an der Stelle  $x = 0$  existiert nicht, wie man folgendmaßen sieht. Die einseitigen Grenzwerte existieren,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{+h}{h} = +1$$

aber sie stimmen nicht überein. Sollte der (allgemeine, nicht einseitige) Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$  existieren, muss ein solcher Wert von  $|h|/h$  angenähert werden, wenn  $h$  sich an  $h = 0$  *beliebig* annähern würde, insbesondere von links oder von rechts. Da unterschiedliche Werte von links und rechts angenähert werden, existiert der (allgemeine, nicht einseitige) Grenzwert nicht. Daher ist  $z_1$  an der Stelle  $x = 0$  nicht differenzierbar.

(b) Die grafische Darstellung von  $z_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$  ist



und ein Vertikal ist in  $(0, 0)$  ersichtlich. Die Ableitung ist

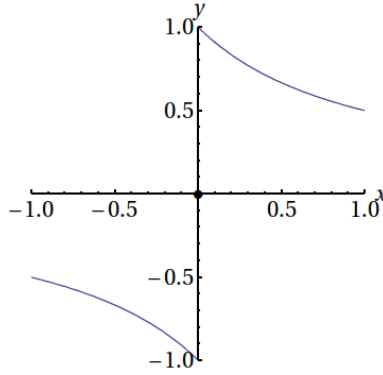
$$z_2'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0$$

und für  $x = 0$ ,

$$z_2'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_2(0+h) - z_2(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

d.h. der Grenzwert ist uneigentlich, und die Ableitung kann keinen reellen Wert in  $x = 0$  annehmen. Daher ist  $z_2$  an dieser Stelle nicht differenzierbar.

(c) Die grafische Darstellung von  $z_3(x) = \text{sign}(x)/(1 + |x|)$  ist



und eine Unstetigkeit ist in  $(0,0)$  ersichtlich. Damit eine eindeutige Tangentengerade an einer Stelle existiert, muss die Kurve an der Stelle ununterbrochen sein, d.h. eine differenzierbare Funktion muss stetig sein. Da  $z_3$  an der Stelle  $x = 0$  nicht stetig ist, ist die Funktion hier nicht differenzierbar. Sonst wird die Ableitung an anderen Stellen folgendermaßen bestimmt.

$$z_3'(x) = D_x \begin{cases} \frac{+1}{1+x}, & x > 0 \\ \frac{-1}{1-x}, & x < 0 \end{cases} = D_x \begin{cases} (x+1)^{-1}, & x > 0 \\ (x-1)^{-1}, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x+1)^{-2}, & x > 0 \\ -(x-1)^{-2}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ -\frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \end{cases} = -\frac{1}{(1+|x|)^2}, \quad x \neq 0$$

Zur Bestätigung sieht man folgendermaßen, dass die Ableitung an der Stelle  $x = 0$  nicht existiert,

$$z_3'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_3(0+h) - z_3(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sign}(h)}{h(1+|h|)} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{+1}{h(1+h)}, & h > 0 \\ \frac{-1}{h(1-h)}, & h < 0 \end{cases} = +\infty$$

d.h. der Grenzwert ist uneigentlich, und die Ableitung kann keinen reellen Wert in  $x = 0$  annehmen. Daher ist  $z_3$  an dieser Stelle nicht differenzierbar.

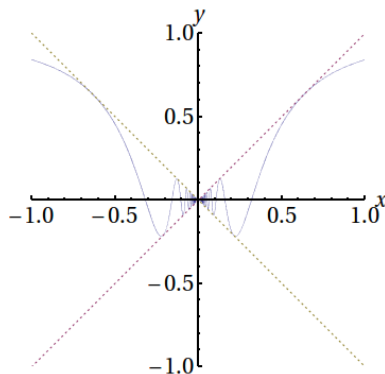
Achtung: Man darf zeilenweise ableiten, nur wenn eine für die Funktion definierende Formel in einem Intervall gilt, z.B. in der folgenden Darstellung,

$$z_3(x) = \begin{cases} \frac{+1}{1+x}, & x > 0 \\ \frac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

gilt die Formel  $z_3(0) = 0$  nur in einem Punkt  $x = 0$ , und die irrtümliche (zeilenweise) Rechnung  $z_3'(0) = D_x 0 = 0$  stimmt mit dem (richtigen) Ergebnis nicht überein, dass  $z_3$  in  $x = 0$  nicht stetig und daher nicht differenzierbar ist. Die anderen definierenden Formeln gelten in Intervallen, und hier darf man zeilenweise ableiten:  $z_3'(x) = D_x[+1/(1+x)]$ ,  $x > 0$ ,  $z_3'(x) = D_x[-1/(1-x)]$ ,  $x < 0$ .

Bemerkung: Die Ableitungsfunktion  $z'_3(x)$  lässt sich mit dem Punkt  $(0, 1)$  stetig ergänzen. Man sieht von der grafischen Darstellung von  $z_3(x)$ , dass die Steigung links und rechts von  $x = 0$  gegen  $-1$  strebt.

- (d) Die grafische Darstellung von  $z_4(x) = x \sin(1/x)$ ,  $x \neq 0$ ,  $z_4(0) = 0$ , ist



wobei die Kurve von  $z_4(x)$  zwischen den gestrichelten Kurven  $y_1(x) = +|x|$  und  $y_2(x) = -|x|$  liegt. Da  $z_4(x)$  sich in der Nähe von  $x = 0$  an die nicht differenzierbaren Funktionen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  annähert, gibt es schon den Hinweis, dass  $z_4(x)$  an dieser Stelle nicht differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt.

$$z'_4(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_4(0+h) - z_4(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h) = ?$$

Wie auf dem 4. Übungsblatt gesehen, es gelten

$$h_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \sin(1/h_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

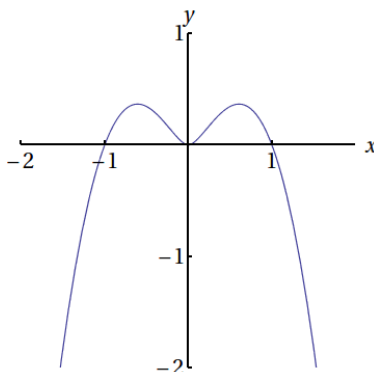
und

$$h_m = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2m\pi} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad \sin(1/h_m) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2m\pi\right) = -1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -1$$

d.h. unterschiedliche Werte werden von  $\sin(1/h)$  angenähert, wenn  $h$  sich an 0 auf unterschiedlichen Wegen annähert. Daher existiert der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h)$  nicht. Also ist  $z_4(x)$  an der Stelle  $x = 0$  nicht differenzierbar. Sonst für  $x \neq 0$  gilt

$$z'_4(x) = \sin(1/x) + x \cos(1/x)(-1/x^2) = \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x^2}$$

- (e) Die grafische Darstellung von  $z_5(x) = x^2 \ln(1/x^2)$ ,  $x \neq 0$ ,  $z_5(0) = 0$ , ist



und die globale Glattheit der Kurve ist ersichtlich, d.h. trotz der scheinbar schwierigen Stelle  $x = 0$  in der Formel für  $z_5(x)$  ist zu vermuten, dass die Funktion an jeder Stelle differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt. (Seite 63 im Skriptum)

$$z_5'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_5(0+h) - z_5(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \ln(1/h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \ln(h^{-2}) = -2 \lim_{h \rightarrow 0} h \ln(h) = 0$$

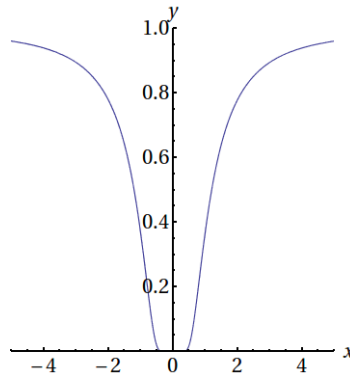
Sonst für  $x \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} z_5'(x) &= D_x x^2 \ln(x^{-2}) = -D_x x^2 \ln(x^2) = -[(x^2)' \ln(x^2) + x^2 (\ln(x^2))'] \\ &= -2x \ln(x^2) - x^2 \frac{(x^2)'}{x^2} = -2x \ln(x^2) - 2x \end{aligned}$$

wobei die letzte Logarithmusfunktion sich (für  $x > 0$  oder  $x < 0$ ) so umschreiben lässt:

$$\ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2 \ln(|x|)$$

(f) Die grafische Darstellung von  $z_6(x) = \exp(-1/x^2)$ ,  $x \neq 0$ ,  $z_6(0) = 0$ , ist



und die globale Glattheit der Kurve ist ersichtlich, d.h. trotz der scheinbar schwierigen Stelle  $x = 0$  in der Formel für  $z_6(x)$  ist zu vermuten, dass die Funktion an jeder Stelle differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt.

$$z_6'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_6(0+h) - z_6(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(-1/h^2)}{h} = 0$$

Um die letzte Gleichung zu zeigen, berechnet man die übereinstimmenden einseitigen Grenzwerte (Seite 63 im Skriptum):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/h^2}}{h} &\stackrel{\sqrt{t} = -1/h}{=} - \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{-t} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h^2}}{h} &\stackrel{\sqrt{t} = +1/h}{=} + \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{-t} = 0 \end{aligned}$$

d.h.  $z_6'(0) = 0$ . Sonst für  $x \neq 0$  gilt

$$z_6'(x) = D_x e^{-x^{-2}} = e^{-x^{-2}} D_x (-x^{-2}) = e^{-x^{-2}} (+2x^{-3}) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$