

# Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

## Lösungen der Beispiele des 5. Übungsblatts

### 1. Stetigkeit und Grenzwerte:

- (a) Aus der folgenden grafischen Darstellung von  $y_1(x) = |x|^{2/3}/(1+x^2)$  ist ersichtlich, dass  $y_1(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_1(x) = \frac{f(g(x))}{p(x)} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x^2, \quad p(x) = 1 + x^2$$

Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $f(x)$ , Potenzfunktion, Wurzel ungerade, stetig auf  $D_f = \mathbb{R}$ .
- $g(x)$ , Polynom, stetig auf  $D_g = \mathbb{R}$ .
- $p(x)$ , Polynom, stetig auf  $D_p = \mathbb{R}$ .
- $f(g(x))$ , Komposition, stetig auf  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ .
- $f(g(x))/p(x)$ , Quotient mit  $p(x) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$ , stetig auf  $\{x \in D_{f \circ g} \cap D_p : p(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \neq 0\} = \mathbb{R}$ .

und daher ist  $y_1(x) = f(g(x))/p(x)$  stetig für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

- (b) Aus der folgenden grafischen Darstellung von  $y_2(x) = |x| \ln |x|$  ist ersichtlich, dass  $y_2(x)$  für jedes  $x \neq 0$  stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_2(x) = b(x)f(b(x)) \quad \text{mit} \quad b(x) = |x|, \quad f(x) = \ln(x)$$

Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

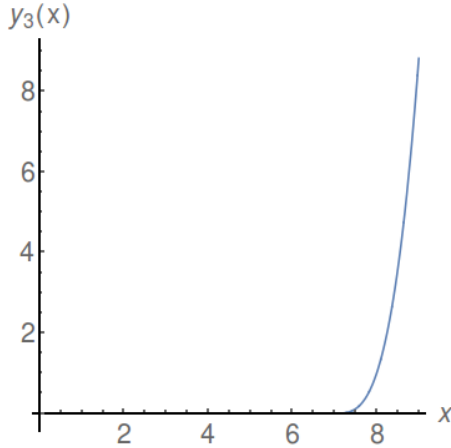
- $b(x)$ , Betragsfunktion, stetig auf  $D_b = \mathbb{R}$ .
- $f(x)$ , Logarithmusfunktion, stetig auf  $\mathbb{R}_+$ .
- $f(b(x))$ , Komposition, stetig auf  $D_{f \circ b} = \{x \in D_b : b(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in \mathbb{R}_+\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- $b(x)f(b(x))$ , Produkt, stetig auf  $D_b \cap D_{f \circ b} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

und daher ist  $y_2(x) = b(x)f(b(x))$  stetig für jedes  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

- Mit der zusätzlichen Zuweisung  $y_2(0) = 0$  wird  $y_2(x)$  an der Stelle  $x_0 = 0$  stetig ergänzt.

- (c) Aus der folgenden grafischen Darstellung von  $y_3(x) = (x-7)^\pi$  ist ersichtlich, dass  $y_3(x)$  für jedes  $x \geq 7$  stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_3(x) = f(g(x)) \quad \text{mit} \quad f(x) = x^\pi, \quad g(x) = x - 7$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $f(x)$ , Potenzfunktion, Potenz  $> 0$ , stetig auf  $D_f = [0, \infty)$ .
- $g(x)$ , Polynom, stetig auf  $D_g = \mathbb{R}$ .
- $f(g(x))$ , Komposition, stetig auf  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 7 \in [0, \infty)\} = [7, \infty)$ .

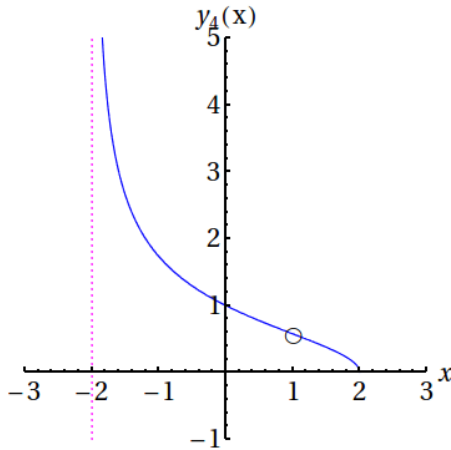
und daher ist  $y_3(x) = f(g(x))$  stetig für jedes  $x \in [7, \infty)$ .

- (d) Aus der folgenden grafischen Darstellung von  $y_4(x) = \sqrt{(3x - 2 - x^2)/(x^2 + x - 2)}$  ist ersichtlich, dass  $y_4(x)$  für jedes  $x \in (-2, 2] \setminus \{+1\}$  stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_4(x) = f(r(x)) \quad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$p(x) = 3x - 2 - x^2 = (x - 1)(2 - x), \quad q(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

$$r(x) = \frac{(x - 1)(2 - x)}{(x - 1)(x + 2)} \stackrel{x \neq 1}{=} \frac{2 - x}{x + 2}$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

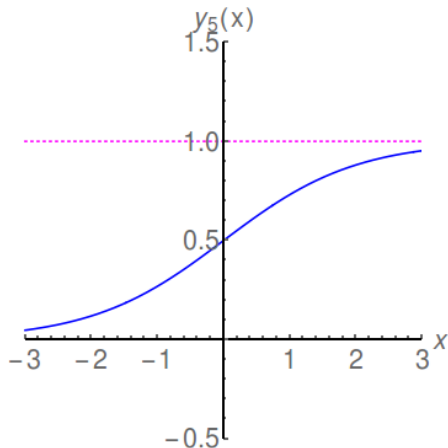
- $f(x)$ , Potenzfunktion, Wurzel gerade, stetig auf  $D_f = [0, \infty)$ .
- $r(x)$ , rationale Funktion, stetig auf  $D_r = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, +1\}$ .
- $f(r(x))$ , Komposition, stetig auf  $D_{f \circ r} = \{x \in D_r : r(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +1\} : r(x) > 0\} = (-2, +2] \setminus \{+1\}$ .

und daher ist  $y_4(x) = f(r(x))$  stetig für jedes  $x \in (-2, +2] \setminus \{+1\}$ .

- Mit der zusätzlichen Zuweisung  $y_4(1) = 1/\sqrt{3}$  wird  $y_4(x)$  an der Stelle  $x_0 = 1$  stetig ergänzt.

- (e) Aus der folgenden grafischen Darstellung von  $y_5(x) = 1/(1 + e^{-x})$  ist ersichtlich, dass  $y_5(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_5(x) = r(e(x)) \quad \text{mit} \quad r(x) = \frac{1}{q(x)}, \quad q(x) = 1 + x, \quad e(x) = \exp(-x)$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $r(x)$ , rationale Funktion, stetig auf  $D_r = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- $e(x)$ , Exponentialfunktion, stetig auf  $D_e = \mathbb{R}$ .
- $r(e(x))$ , Komposition, stetig auf  $D_{r \circ e} = \{x \in D_e : e(x) \in D_r\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} \neq -1\} = \mathbb{R}$ .

und daher ist  $y_5(x) = r(e(x))$  stetig für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

Für jedes der obigen Beispiele bestimmt man den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} y_i(x)$  an einer Stelle  $x_0$ , in der die Funktion stetig ist, einfach durch die Auswertung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y_i(x) = y_i(x_0), \quad i = 1, \dots, 5.$$

Wie oben hingewiesen gibt es zwei Funktionen, die sich stetig ergänzen lassen.

Wegen der Eigenschaft  $x^p \log_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  ( $p > 0$ ) folgen

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y_2(x) \stackrel{|x|=-x}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} -x \ln(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

und daher ist die zusätzliche Zuweisung  $y_2(0) = 0$  eine stetige Ergänzung.

Mit einer algebraischen Vereinfachung folgt

$$\lim_{x \rightarrow 1} y_4(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{3x - 2 - x^2}{x^2 + x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2 - x}{x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und daher ist die zusätzliche Zuweisung  $y_4(1) = 1/\sqrt{3}$  eine stetige Ergänzung.

## 2. Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts:

(a) Durch algebraische Vereinfachung ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 1 = 2$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overbrace{(x^4 + 1)}^{>0, x \approx 1^+}}{\underbrace{(x-1)}_{>0, x \approx 1^+} \underbrace{(x+1)}_{>0, x \approx 1^+}} = +\infty$$

(b) Durch Eigenschaften der Winkelfunktion bekommt man

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \tan(\pi x/2) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \tan(\pi x/2) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

- (c) Die Komposition  $f(g(x)) = |\sqrt[3]{x}|$  mit  $f(x) = |x|$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$  und  $D_g = \mathbb{R}$ , ist stetig auf  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ . Aus der Eigenschaft  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) und der Stetigkeit der Komposition  $|\sqrt[3]{x}|$  auf  $\mathbb{R}$  folgt  $\sqrt[3]{x} \sin(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  mit dem Sandwich

$$0 = -|\sqrt[3]{0}| = \lim_{x \rightarrow 0} -|\sqrt[3]{x}| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \sin(1/x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} |\sqrt[3]{x}| = |\sqrt[3]{0}| = 0$$

Aus der Stetigkeit der Winkelfunktion  $\sin(x)$ , des Polynoms  $x^2$ , der Komposition  $\sin(x^2)$ , der rationalen Funktion  $1/x^2$  ( $x \neq 0$ ) und des Quotienten  $\sin(x^2)/x^2$  folgt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x^2)/x^2 = \sin(1^2)/1^2 = \sin(1)$$

Aus den Eigenschaften  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) und  $1/|x| = 1/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  folgt  $\sin(x)/|x| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  mit dem Sandwich

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1/x \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)/|x| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$$

- (d) Aus der Eigenschaft  $\log_a(x)/x^p \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  ( $p > 0$ ) folgt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2(x)/\sqrt{x} = 0$$

Aus der Eigenschaft  $x^p \log_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  ( $p > 0$ ) folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$$

- (e) Aus der Eigenschaft  $x^p a^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  ( $a > 1$ ) folgt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)4^{-x} = 0$$

Aus den Eigenschaften  $x^{-n} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $x^n a^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$  ( $a > 1$ ) folgt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x}{1+x+x^2} \left( \frac{x^{-2}}{x^{-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{-2} 5^x}{(1+1/x+1/x^2)} = 0$$

Aus der Eigenschaft  $a^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  ( $a > 1$ ) folgt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2^x}{e^x+3^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2^x}{e^x+3^{-x}} \left( \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + (e/2)^{-x}}{1 + (3e)^{-x}} = 0$$

### 3. Bisektionsverfahren:

- (a) Für die überall stetige Funktion

$$f(x) = \frac{1 - 2x \tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2} \quad \text{gelten} \quad f(0) = +1.0000, \quad f(1) = -0.1427$$

Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall  $[0, 1]$  an. Mit den Anfangswerten  $a = 0$  und  $b = 1$  und immer  $c = (a+b)/2$  liefert das Bisektionsverfahren folgende Ergebnisse:

$c$	$f(c)$	$a$	$b$
0.50000	0.34327	0.00000	1.00000
0.75000	0.01423	0.50000	1.00000
0.87500	-0.08275	0.75000	1.00000
0.81250	-0.03946	0.75000	0.87500
0.78125	-0.01398	0.75000	0.81250
0.76562	-0.00022	0.75000	0.78125
0.75781	0.00692	0.75000	0.76562
0.76172	0.00333	0.75781	0.76562
0.76367	0.00155	0.76172	0.76562
0.76465	0.00066	0.76367	0.76562
0.76514	0.00022	0.76465	0.76562
0.76538	-0.00000	0.76514	0.76562
0.76526	0.00011	0.76514	0.76538
0.76532	0.00005	0.76526	0.76538
0.76535	0.00003	0.76532	0.76538
0.76537	0.00001	0.76535	0.76538
0.76537	0.00001	0.76537	0.76538

d.h. eine Nullstelle für  $f(x)$  ist  $x_0 \approx 0.7654$ .

(b) Für die überall stetige Funktion

$$g(x) = \frac{(6x^2 - 2) \tan^{-1}(x) - 6x}{(1 + x^2)^3} \quad \text{gelten} \quad g(1) = -0.3573, \quad g(2) = 0.0989$$

Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall  $[1, 2]$  an. Mit den Anfangswerten  $a = 1$  und  $b = 2$  und immer  $c = (a+b)/2$  liefert das Bisektionsverfahren folgende Ergebnisse:

$c$	$g(c)$	$a$	$b$
1.50000	0.06706	1.00000	2.00000
1.25000	-0.05299	1.00000	1.50000
1.37500	0.02285	1.25000	1.50000
1.31250	-0.01032	1.25000	1.37500
1.34375	0.00734	1.31250	1.37500
1.32812	-0.00121	1.31250	1.34375
1.33594	0.00314	1.32812	1.34375
1.33203	0.00098	1.32812	1.33594
1.33008	-0.00011	1.32812	1.33203
1.33105	0.00044	1.33008	1.33203
1.33057	0.00017	1.33008	1.33105
1.33032	0.00003	1.33008	1.33057
1.33020	-0.00004	1.33008	1.33032

d.h. eine Nullstelle für  $g(x)$  ist  $x_1 \approx 1.330$ .

4. Zwischenwertsatz:

(a) Die rationale Funktion

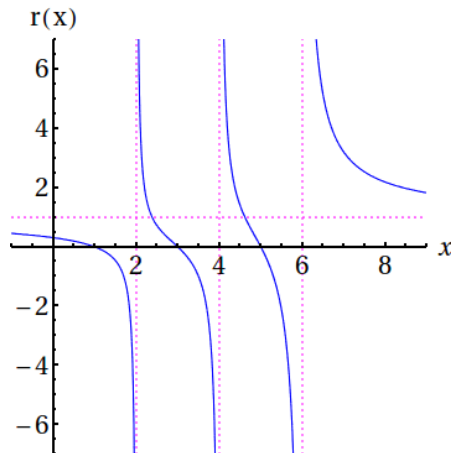
$$r(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-4)(x-6)}$$

besitzt die Nullstellen  $\{1, 3, 5\}$  und die Polstellen  $\{2, 4, 6\}$ .

(b) Anhand der Stetigkeit der rationalen Funktion zwischen Nullstellen und Polstellen bedeuten die Werte

$r(0.5) \approx +0.195$	$r(x) > 0, \quad x \in (-\infty, 1)$
$r(1.5) \approx -0.467$	$r(x) < 0, \quad x \in (1, 2)$
$r(2.5) \approx +0.714$	$r(x) > 0, \quad x \in (2, 3)$
$r(3.5) \approx -1.000$	dass $r(x) < 0, \quad x \in (3, 4)$
$r(4.5) \approx +1.400$	$r(x) > 0, \quad x \in (4, 5)$
$r(5.5) \approx -2.143$	$r(x) < 0, \quad x \in (5, 6)$
$r(6.5) \approx +5.133$	$r(x) > 0, \quad x \in (6, +\infty)$

(c) Die grafische Darstellung von  $r(x)$  ist:



5. Geometrische Reihen:

(a) Nach  $n$  Minuten geht der Student so viele Meter,

$$100 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 100 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$$

Man überzeugt sich davon durch eine Kontrolle mit bestimmten kleinen Werten von  $n$ . Diese Summe lässt sich durch eine geometrische Reihe vereinfachen:

$$100 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 100 \left( -1 + \sum_{i=0}^n \left( \frac{1}{2} \right)^i \right) = 100 \left[ -1 + \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} \left( \frac{2}{2} \right) \right] = 100(1 - 2^{-n})$$

Insbesondere nach 10 Minuten geht er

$$100(1 - 2^{-10}) = 99.9023 \text{ Meter}$$

- (b) Die Anzahl der Minuten  $n$ , nach der der Student 90% des Weges zum Ziel kommt, d.h. 90 Meter geht, erfüllt:

$$\begin{array}{rcl} 100(1 - 2^{-n}) & = & 90 \\ 1 - 2^{-n} & = & 0.9 \\ 0.1 = 1 - 0.9 & = & 2^{-n} \\ \log_2(0.1) & = & \log_2(2^{-n}) = -n \\ 3.322 \approx \log_2(10) & = & n \end{array} \left| \begin{array}{l} \div 100 \\ + 2^{-n} - 0.9 \\ \log_2(\cdot) \\ \times -1 \end{array} \right.$$

d.h. es dauert  $\approx 3.322$  Minuten. Grober beschrieben ist er nach 3 Minuten 87.5% des Weges und nach 4 Minuten 93.75% des Weges gegangen.