Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften
Lösungen der Beispiele des 3. Übungsblatts

1. Rationale Funktionen:

   (a) Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $2x^2 + 8x + 8$ sind

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4(2)(8)}}{2(2)} = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4(2)(8)}}{2(2)} = -2$$

   d.h. die Nullstelle $x_1 = x_2 = -2$ hat Multiplizität 2. Es folgt die Faktorisierung $2x^2+8x+8 = 2(x+2)^2$. Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 + 4x + 3$ sind

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(2)} = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(2)} = -1$$

   und es folgt die Faktorisierung $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$. Daher ist die Faktorisierung der rationalen Funktion gegeben durch

$$r(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 + 4x + 3} = \frac{2(x + 2)^2}{(x + 3)(x + 1)}$$

   (b) Anhand der Polstellen der rationalen Funktion sind die senkrechten Asymptoten gegeben durch die senkrechten Geraden $x = -3$ und $x = -1$. Da $1/x^k \to 0$ für $k > 0$ und $|x| \to \infty$ gilt, ist die waagerechte Asymptote gegeben durch

$$r(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 + 4x + 3}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right) = \frac{2+8/x + 8/x^2}{1+4/x + 3/x^2} \to \frac{2}{1} = 2, \quad |x| \to \infty$$

   oder $y = 2$. Hier ist $(x^{-2}/x^{-2}) = 1$ stategisch ausgewählt worden, wobei die Potenz (-2) der höchsten Potenz $(+2)$ des Zählers und des Nenners entspricht.

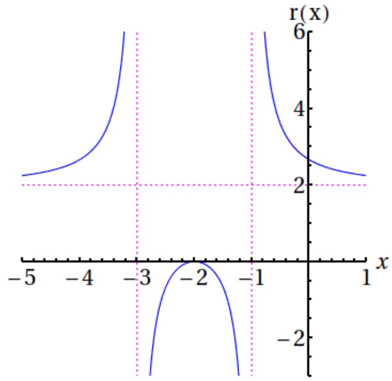
   (c) Die Tabelle mit dem Vorzeichen der Funktion $r(x)$ und ihren Faktoren in den Teilintervallen $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -1)$ und $(-1, +\infty)$ ist

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, +\infty)$
2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + 2)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + 3)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + 1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$r(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$

   (d) Anhand des Vorzeichens der rationalen Funktion in den jeweiligen Teilintervallen gelten

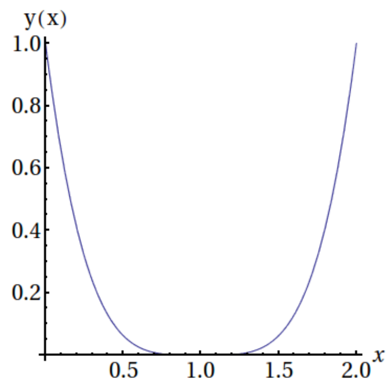
$$\begin{array}{llll}
r(x) \to +\infty & \text{wenn } x \to -3^- & \text{d.h. links von} & -3 \\
r(x) \to -\infty & \text{wenn } x \to -3^+ & \text{d.h. rechts von} & -3 \\
r(x) \to -\infty & \text{wenn } x \to -1^- & \text{d.h. links von} & -1 \\
r(x) \to +\infty & \text{wenn } x \to -1^+ & \text{d.h. rechts von} & -1
\end{array}$$

(e) Die grafische Darstellung von $r(x)$ ist



2. Umkehrfunktionen:

(a) Die grafische Darstellung von $y(x) = (x-1)^4$ ist

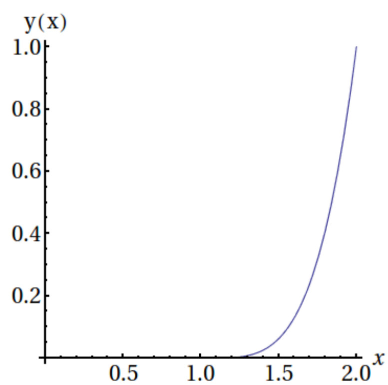


wobei $D = \mathbb{R}$ und $B = [0, +\infty)$ in der Grafik ersichtlich sind.

(b) Wenn D eingeschränkt wird auf

$$D_y = [1, +\infty)$$

hat y den Graphen,



der die Bedingung erfüllt, dass jede waagerechte Gerade höchstens einmal den Graphen trifft. Eine andere mögliche Einschränkung wäre $(-\infty, 1]$, und diese beiden Möglichkeiten sind maximal, da die Bedingung einer Umkehrfunktion verletzt wird, wenn die Mengen vergrößert werden. Anhand der obigen Grafik ist der Bildbereich

$$B_y = [0, +\infty)$$

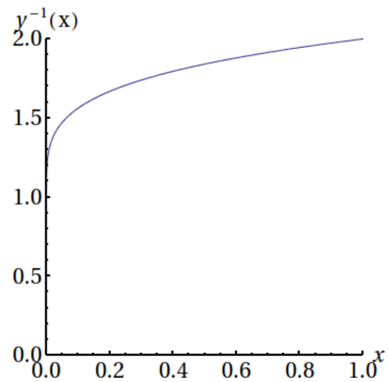
(c) Die Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$ erfüllt

$$x = y(y^{-1}(x)) = (y^{-1}(x) - 1)^4$$

Da die rechte Seite nicht negativ ist, darf der vierte Wurzel von beiden Seiten gezogen werden, und es folgt

$$\sqrt[4]{x} = y^{-1}(x) - 1 \quad \text{oder} \quad y^{-1}(x) = 1 + \sqrt[4]{x}$$

(d) Die grafische Darstellung von $y^{-1}(x)$ ist



Wie in der Grafik ersichtlich ist, gelten $D_{y^{-1}} = [0, +\infty)$ und $B_{y^{-1}} = [1, +\infty)$.

(e) Es gelten (notwendigerweise) $D_y = B_{y^{-1}}$ und $B_y = D_{y^{-1}}$.

3. Translationen und Streckungen von Funktionen:

(a) Mit der Streckung S der Funktion $q(x) = x^2$

$$S(x) = q(\sqrt{2}x) = 2x^2$$

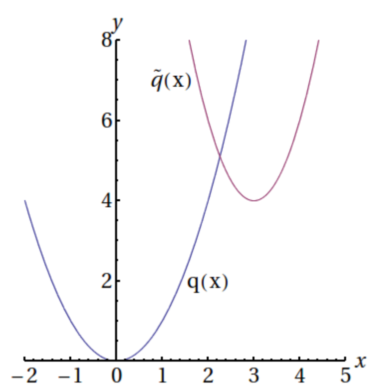
und der Translation T dieser Streckung

$$T(x) - 4 = S(x - 3), \quad T(x) = 2(x - 3)^2 + 4$$

ergibt sich durch $\tilde{q}(x) = T(x)$ die Funktion

$$\tilde{q}(x) = 2(x - 3)^2 + 4$$

Die grafische Darstellung von $q(x)$ zusammen mit $\tilde{q}(x)$ ist



(b) Mit der Streckung S der Funktion $b(x) = |x|$

$$S(x) = b(2x) = 2|x|$$

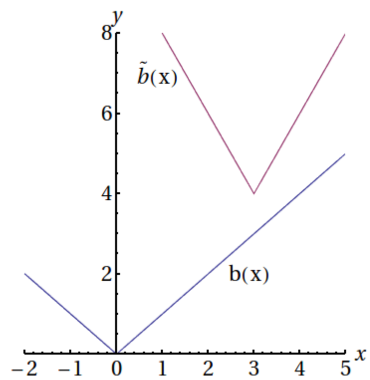
und der Translation T dieser Streckung

$$T(x) - 4 = S(x - 3), \quad T(x) = 2|x - 3| + 4$$

ergibt sich durch $\tilde{b}(x) = T(x)$ die Funktion

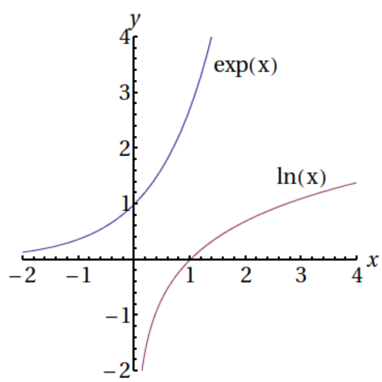
$$\tilde{b}(x) = 2|x - 3| + 4$$

Die grafische Darstellung von $b(x)$ zusammen mit $\tilde{b}(x)$ ist



4. Exponentielle und Logarithmische Funktionen:

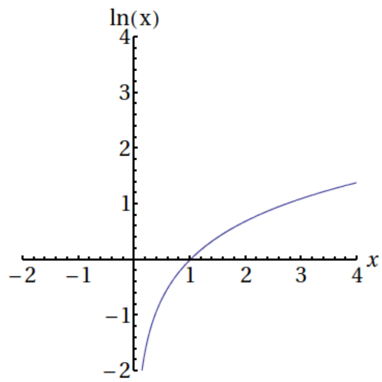
(a) Grafische Darstellungen von $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = \ln(x)$ sind



Wie in der Grafik ersichtlich ist, es gelten

$$D_f = \mathbb{R}, \quad B_f = \mathbb{R}_+, \quad D_g = \mathbb{R}_+, \quad B_g = \mathbb{R}$$

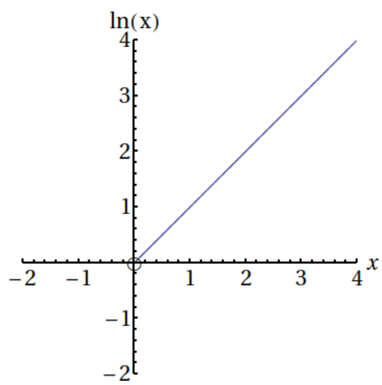
(b) Man wertet $f(x) = e^x$ in den Werten des folgenden Graphen aus,



z.B.

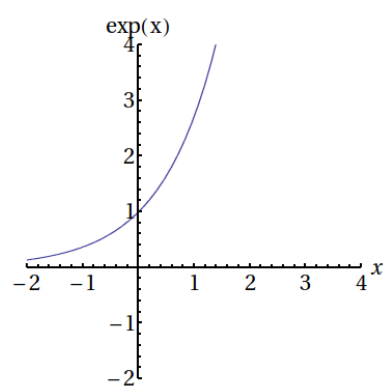
x	≤ 0	$\to 0^+$	1	2	3	$\cdots$	n
$g(x)$	$?$	$\to -\infty$	0	$\ln(2)$	$\ln(3)$	$\cdots$	$\ln(n)$
$f(g)$	$?$	$\to 0^+$	1	2	3	$\cdots$	n

und diese Auswertungen können folgendermaßen grafisch dargestellt werden,



d.h. $f(g(x)) = x$ für alle $x > 0$.

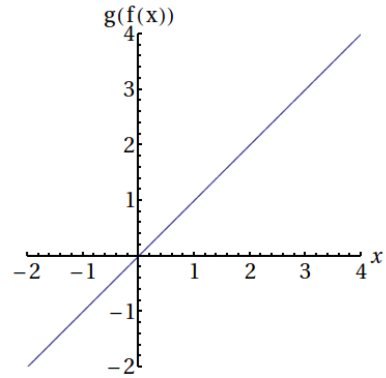
(c) Man wertet $g(x) = \ln(x)$ in den Werten des folgenden Graphen aus,



z.B.

x	$\to -\infty$	$-n$	$\cdots$	-1	0	$+1$	$\cdots$	n
$f(x)$	$\to 0^+$	e^{-n}	$\cdots$	e^{-1}	1	e^{+1}	$\cdots$	e^n
$g(f)$	$\to -\infty$	$-n$	$\cdots$	-1	0	$+1$	$\cdots$	n

und diese Auswertungen können folgendermaßen grafisch dargestellt werden,



d.h. $g(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5. Exponentielle und Logarithmische Funktionen:

   (a) Durch die Daten $w(0) = 2$ und $w(2) = 1$ ergibt sich ein System von Gleichungen für die Unbekannten der Funktion $w(t) = w_0 e^{\lambda t}$,

   $$2 = w(0) = w_0 e^{\lambda \cdot 0} = w_0, \quad 1 = w(2) = w_0 e^{\lambda \cdot 2} = 2e^{2\lambda}$$

   wobei $w_0 = 2$ von der ersten Gleichung schon in der zweiten Gleichung verwendet worden ist, d.h. es bleibt nur λ zu bestimmen. Man dividiert die zweite Gleichung durch 2 und wertet $\ln(\cdot)$ in den beiden Seiten aus,

   $$\ln(2^{-1}) = \ln(1/2) = \ln(e^{2\lambda}) = 2\lambda$$

   wobei die letzte Gleichung aus $\ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (vgl. Beispiel 4b) folgt. Der Parameter λ ist dann

   $$\lambda = \frac{1}{2}\ln(2^{-1}) = -\frac{1}{2}\ln(2)$$

   wobei die Eigenschaft $\ln(A^p) = p\ln(A)$ verwendet worden ist. Auch mit dieser Eigenschaft folgt

   $$\lambda t = -\frac{1}{2}\ln(2)t = -\ln(2)t/2 = (-t/2)\ln(2) = \ln(2^{-t/2})$$

   Also mit $w_0 = 2$ und $\lambda = -\frac{1}{2}\ln(2)$ folgt

   $$w(t) = w_0 e^{\lambda t} = 2e^{\ln(2^{-t/2})} = 2 \cdot 2^{-t/2} = 2^{1-t/2}$$

   wobei die Eigenschaft $e^{\ln(x)} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (vgl. Beispiel 4c) verwendet worden ist.

   (b) Sei $r(t) = r_0 e^{\mu t}$ die zu bestimmende Exponentialfunktion. Durch die gegebenen Daten $r(1) = 3$ und $r(2) = 1$ ergibt sich ein System von Gleichungen für die Unbekannten,

   $$3 = r(1) = r_0 e^{\mu \cdot 1}, \quad 1 = r(2) = r_0 e^{\mu \cdot 2}$$

   Man löst nach r_0 in den beiden Gleichungen auf,

   $$r_0 = \frac{3}{e^\mu} = \frac{1}{e^{2\mu}} \quad \text{oder} \quad e^\mu = \frac{1}{3}$$

   Man wertet $\ln(\cdot)$ in den beiden Seiten der letzten Gleichung aus,

   $$\mu = \ln(e^\mu) = \ln(1/3)$$

wobei die Eigenschaft $\ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (vgl. Beispiel 4c) verwendet worden ist. Es folgt

$$3 = r(1) = r_0 e^\mu = r_0 e^{\ln(1/3)} = r_0/3 \quad \text{oder} \quad r_0 = 9$$

wobei die Eigenschaft $e^{\ln(x)} = x$, $\forall x > 0$, (vgl. Beispiel 4b) verwendet worden ist. Schließlich gilt

$$r(t) = r_0 e^{\mu t} = 9e^{\ln(1/3)t} = 9e^{t\ln(3^{-1})} = 9e^{\ln(3^{-t})} = 9 \cdot 3^{-t}$$

wobei die Eigenschaft $\ln(A^p) = p\ln(A)$ verwendet worden ist. Die Halbwertzeit $\hat{t}$ erfüllt

$$9 = r_0 = r(0) = 2r(\hat{t}) = 2 \cdot [9 \cdot 3^{-\hat{t}}]$$

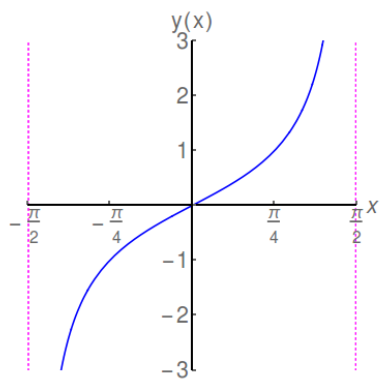
Man dividiert durch 18 und wertet $\ln(\cdot)$ in den beiden Seiten aus,

$$-\ln(2) = \ln(2^{-1}) = \ln(1/2) = \ln(3^{-\hat{t}}) = -\hat{t}\ln(3)$$

wobei die Eigenschaft $\ln(A^p) = p\ln(A)$ verwendet worden ist. Schließlich ist die Halbwertzeit gegeben durch die letzte Gleichung: $\hat{t} = \ln(2)/\ln(3)$.

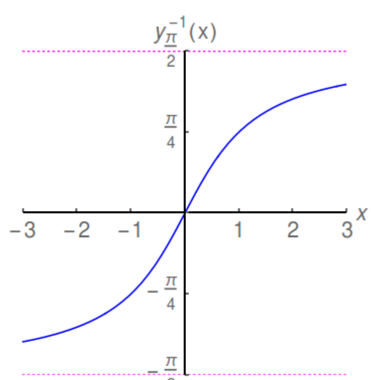
6. Winkelfunktionen:

   (a) Die grafische Darstellung der Winkelfunktion $y(x) = \tan(x)$ mit $D_y = (-\pi/2, +\pi/2)$ ist

   wobei $B_y = \mathbb{R}$ in der Grafik ersichtlich ist.

   (b) Mit dem Definitionsbereich $D_y = (-\pi/2, +\pi/2)$ erfüllt $y(x)$ die Bedingung, dass jede senkrechte Gerade den Graphen höchstens einmal trifft. Daher existiert eine Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$ mit einem Graphen, der eine Spiegelung des Graphen für $y(x)$ durch die Mediane ist,

Hier gelten (notwendigerweise) $D_{y^{-1}} = \mathbb{R} = B_y$ und $B_{y^{-1}} = (-\pi/2, +\pi/2) = D_y$.

(c) Durch Spiegelung und Auswertung (auch mit Taschenrechner) bekommt man die folgenden Werte

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$