

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

Lösungen der Beispiele des 2. Übungsblatts

1. Geraden und Ungleichungen:

(a) Die Steigung durch $P(1, 1)$ und $Q(3, 2)$ ist

$$s = \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist die Gerade gegeben durch

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 = (x + 1)/2$$

Die Steigung durch $Q(3, 2)$ und $R(0, 2)$ ist

$$s = \frac{2 - 2}{0 - 3} = 0$$

und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (3, 2)$ ist die Gerade gegeben durch

$$y_2(x) = 0(x - 3) + 2 = 2$$

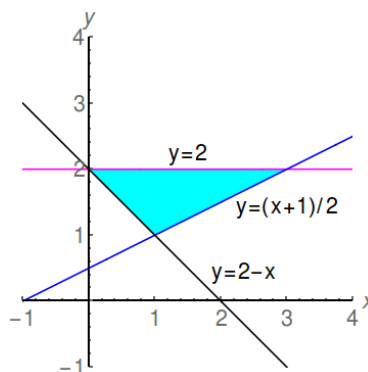
Die Steigung durch $R(0, 2)$ und $P(1, 1)$ ist

$$s = \frac{1 - 2}{1 - 0} = -1$$

und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (0, 2)$ ist die Gerade gegeben durch

$$y_3(x) = -(x - 0) + 2 = 2 - x$$

(b) Die grafische Darstellen des Dreiecks ist:



Die Darstellung des Dreiecks D (inklusive des Randes) in Mengennotation ist

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2\} \cap \\ &\quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2 - x\} \cap \\ &\quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x + 1)/2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)/2 \leq y \leq 2, 2 - x \leq y \leq 2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2, 2 - y \leq x \leq 2y - 1\} \end{aligned}$$

(c) Die Darstellung des Dreiecks D (exklusive des Randes) in Mengennotation ist

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)/2 < y < 2, 2-x < y < 2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2, 2-y < x < 2y-1\} \end{aligned}$$

2. Hyperbeln und Ungleichungen:

(a) Lösungen der Gleichung

$$y^2 - x^2 = 1 \quad \text{oder} \quad y^2 = 1 + x^2 \quad \text{oder} \quad |y| = \sqrt{1 + x^2}$$

sind

$$y \in \{-\sqrt{1+x^2}, \sqrt{1+x^2}\}$$

Zwei entsprechende Funktionen sind

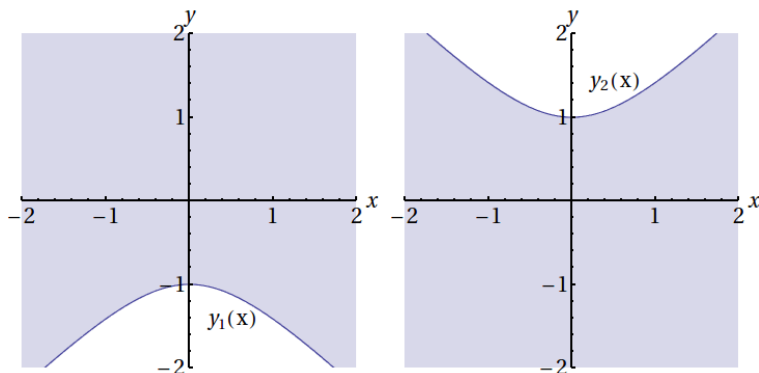
$$y_1(x) = -\sqrt{1+x^2} \quad \text{und} \quad y_2(x) = +\sqrt{1+x^2}$$

die $y_1(x) < 0$ und $y_2(x) > 0$ erfüllen.

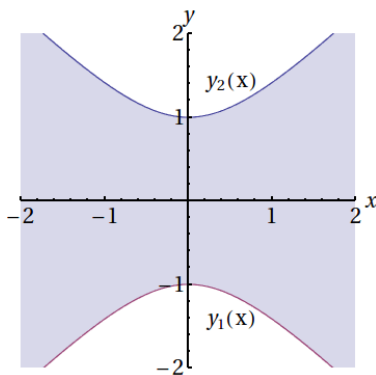
(b) Die grafische Darstellung der Mengen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) < y\} \quad \text{bzw.} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < y_2(x)\}$$

sind



(c) Die grafische Darstellung der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_2(x) < y < y_1(x)\}$ ist



Die Ungleichung $-\sqrt{1+x^2} < y < \sqrt{1+x^2}$ ist äquivalent zu

$$|y| < \sqrt{1+x^2} \quad \text{oder} \quad y^2 < 1+x^2$$

und daher sind die folgenden Darstellungen der oben grafisch dargestellten Menge äquivalent:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 1\} \quad \text{und} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) < y < y_2(x)\}$$

3. Parabeln und Ungleichungen:

(a) Die Nullstellen der quadratischen Funktion $q(x) = -6 - 4x + 2x^2$ sind

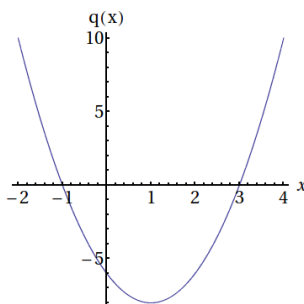
$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = -1, \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{4^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = +3$$

(b) Es folgt die Faktorisierung $q(x) = 2(x+1)(x-3)$.

(c) Eine Tabelle mit dem Vorzeichen von $q(x)$ und seinen Faktoren in den Teilintervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, +3)$ und $(+3, +\infty)$ ist

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +3)$	$(+3, +\infty)$
2	\oplus	\oplus	\oplus
$(x+1)$	\ominus	\oplus	\oplus
$(x-3)$	\ominus	\ominus	\oplus
$q(x)$	\oplus	\ominus	\oplus

(d) Die grafische Darstellung von q ist



(e) Aus der Grafik ist ersichtlich, $q(x) < 0$ gilt für $x \in (-1, 3)$.

4. Kubische und Biquadratische Polynome:

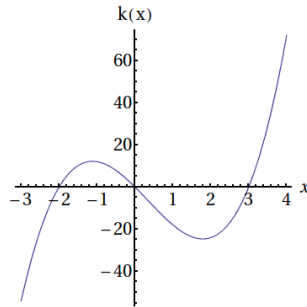
(a) Die Nullstellen des kubischen Polynoms $k(x) = -18x - 3x^2 + 3x^3$ bestimmt man zuerst durch die Faktorisierung,

$$k(x) = xq(x), \quad q(x) = 3x^2 - 3x - 18$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $q(x) = 3x^2 - 3x - 18$ sind

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4(3)(-18)}}{2(3)} = -2, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4(3)(-18)}}{2(3)} = +3$$

Es folgen die Faktorisierungen $q(x) = 3(x+2)(x-3)$ und $k(x) = xq(x) = 3x(x+2)(x-3)$. Die grafische Darstellung von $k(x)$ ist



(b) Die Nullstellen des biquadratischen Polynoms $b(x) = -24 - 4x^2 + 4x^4$ bestimmt man zuerst durch die Darstellung,

$$b(x) = -24 - 4(x^2) + 4(x^2)^2 = q(x^2), \quad q(x) = -24 - 4x + 4x^2$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $q(x) = -24 - 4x + 4x^2$ sind

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4(4)(-24)}}{2(4)} = -2, \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{4^2 + 4(4)(-24)}}{2(4)} = +3$$

Es folgen die Faktorisierungen $q(x) = 4(x+2)(x-3)$ und $b(x) = q(x^2) = 4(x^2+2)(x^2-3)$. Die Nullstellen des Faktors $x^2 + 2$ sind komplex,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-\sqrt{-1}\sqrt{8}}{2} = -i\sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = +i\sqrt{2}$$

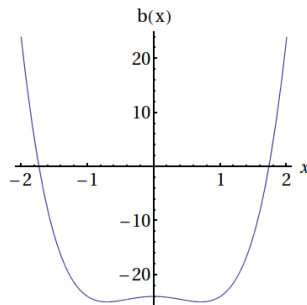
Die Nullstellen des Faktors $x^2 - 3$ sind reell,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = -\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x_2 = +\sqrt{3}$$

Es ergibt sich dann

$$b(x) = 4(x^2 + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 4(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Die grafische Darstellung von $b(x)$ ist



5. Polynomdivision:

(a) Mit $b(x) = -6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4$ ist der Quotient $k(x) = b(x)/(x + 2)$ gegeben durch

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad -x^3 \quad -5x^2 \quad -x \quad -6 \quad \div \quad x+2 = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
 \ominus \quad x^4 \quad +2x^3 \\
 \hline
 0 \quad -3x^3 \quad -5x^2 \quad -x \quad -6 \\
 \ominus \quad -3x^3 \quad -6x^2 \\
 \hline
 0 \quad x^2 \quad -x \quad -6 \\
 \ominus \quad x^2 \quad +2x \\
 \hline
 0 \quad -3x \quad -6 \\
 \ominus \quad -3x \quad -6 \\
 \hline
 0 \quad 0
 \end{array}$$

oder $k(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

(b) Der Quotient $q(x) = k(x)/(x - 3)$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad -3x^2 \quad +x \quad -3 \quad \div \quad x-3 = x^2 + 1 \\
 \ominus \quad x^3 \quad -3x^3 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad x \quad -3 \\
 \ominus \quad x \quad -3 \\
 \hline
 0 \quad 0
 \end{array}$$

oder $q(x) = x^2 + 1$.

(c) Die Nullstellen von $q(x) = x^2 + 1$ sind komplex,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0 - 4(1)(1)}}{2(1)} = -\frac{\sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = -i \quad \text{und} \quad x_2 = +i$$

Die Faktorisierung

$$b(x) = (x + 2)k(x) = (x + 2)(x - 3)q(x) = (x + 2)(x - 3)(x^2 + 1)$$

zeigt, die Nullstellen von $b(x)$ sind $\{-2, 3, -i, +i\}$. Die grafische Darstellung von $b(x)$ ist

