Ergänzungen für die ERD Vorlesung in der Woche 10.-14. Okt 2016

Seite 19: Man löst $|x| = 1$ durch die stückweise Definition der Betragsfunktion,

$$1 = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \leq 0: \quad 1 = |x| = -x \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \geq 0: \quad 1 = |x| = x \quad \Rightarrow \quad x = +1$$

Die Gesamtmenge von Lösungen: $x \in \{-1, +1\}$.

Man löst $|x| < 1$ durch die stückweise Definition der Betragsfunktion,

$$1 > |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \leq 0: \quad 1 > |x| = -x \quad \Rightarrow \quad x > -1 \qquad \text{d.h. } x \in (-1, 0]$$

(Achtung: Der Schritt $(1 > -x)$ zu $(-1 < x)$ durch $\times(-1)$ dreht $(>)$ zum $(<)$.)
Alle Lösungen

$$\text{mit } x \geq 0: \quad 1 > |x| = x \quad \Rightarrow \quad x < +1 \qquad \text{d.h. } x \in [0, +1)$$

Die Gesamtmenge von Lösungen: $x \in (-1, 0] \cup [0, +1) = (-1, +1)$ oder $-1 < x < +1$.

Man löst $|x| > 1$ durch die stückweise Definition der Betragsfunktion,

$$1 < |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \leq 0: \quad 1 < |x| = -x \quad \Rightarrow \quad x < -1 \qquad \text{d.h. } x \in (-\infty, -1)$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \geq 0: \quad 1 < |x| = x \quad \Rightarrow \quad x > +1 \qquad \text{d.h. } x \in (+1, +\infty)$$

Die Gesamtmenge von Lösungen: $x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$.

Analog wird die Relation $|(x - x_0)/a| = |(y - y_0)/b|$ für die Asymptoten fogendermaßen vereinfacht. Durch die stückweise Definition der Betragsfunktion,

$$|(x - x_0)/a| = |(y - y_0)/b| = \begin{cases} -(y - y_0)/b, & (y - y_0)/b \leq 0 \\ (y - y_0)/b, & (y - y_0)/b \geq 0 \end{cases}$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } (y - y_0)/b \leq 0: \quad |(x - x_0)/a| = -(y - y_0)/b \quad \Rightarrow \quad y = y_0 - b|(x - x_0)/a|$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } (y - y_0)/b \geq 0: \quad |(x - x_0)/a| = (y - y_0)/b \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + b|(x - x_0)/a|$$

Die Gesamtmenge von Lösungen:

$$y \in \left\{ y_0 - b\left|\frac{x-x_0}{a}\right|, y_0 + b\left|\frac{x-x_0}{a}\right| \right\} = \left\{ y_0 - \frac{b}{a}(x-x_0), y_0 + \frac{b}{a}(x-x_0) \right\}$$

wobei für jedes fixierte x diese zwei Mengen gleich sind, obwohl die zwei Elemente nicht notwendigerweise in der selben Reihenfolge sind. Zwei entsprechende Funktionen sind

$$y_1(x) = y_0 - (b/a)(x-x_0), \quad y_2(x) = y_0 + (b/a)(x-x_0)$$

Seite 26: Die Ellipse ist gegeben durch die äquivalenten Relationen

$$x^2/4 + y^2 = 1 \qquad y^2 = 1 - x^2/4 \qquad |y| = \sqrt{1-x^2/4}$$

Wie auf Seite 19 gesehen, sind die y-Lösungen der letzten Gleichung gegeben durch $y \in \{-\sqrt{1-x^2/4}, +\sqrt{1-x^2/4}\}$. Zwei entsprechende Funktionen sind

$$y_1(x) = -\sqrt{1-x^2/4} \qquad y_2(x) = +\sqrt{1-x^2/4}$$

wobei der untere Teil der Ellipse gegeben ist durch $y_1(x)$ und der obere Teil durch $y_2(x)$. Am Ende der Seite sieht man, das Innere der Ellipse ist gegeben durch

$$-\sqrt{1-x^2/4} = y_1(x) < y < y_2(x) = +\sqrt{1-x^2/4}$$

Wie auf Seite 19 gesehen, sind diese Ungleichungen äquivalent zu der einen Ungleichung

$$|y| < \sqrt{1-x^2/4}$$

die äquivalent ist zu den folgenden Ungleichungen

$$y^2 = |y|^2 < \sqrt{1-x^2/4}^2 \qquad x^2/4 + y^2 < 1$$

und die letzte Ungleichung sieht man am Anfang der Seite.

Seite 27: Für das Polynom $y(x) = ax^2 + bx + c$ gilt die Faktorisierung $y(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ mit den Nullstellen

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

wie man durch Multiplikation sieht,

$$a(x-x_1)(x-x_2) = a[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2]$$

$$= a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2 - (\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\right] = ax^2 + bx + c$$

Seite 28: Beispielsweise sind die Nullstellen für das Polynom $y(x) = x^2 + x + 1$ gegeben durch

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1-\sqrt{-1}\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-\imath\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$$

und analog

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$$

Als Kontrolle sieht man, es ergibt sich durch Auswertung

$$
\begin{aligned}
y(x_1) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right) + 1 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right) + 1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right) + 1 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath + \frac{3}{4}(-1) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right) + 1 = 0
\end{aligned}
$$

und analog $y(x_2) = 0$.

Seite 30: Wie oben für den Fall $n = 2$ gesehen lässt sich das allgemeine Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ bezüglich der Nullstellen $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ immer so umschreiben:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Wenn $x_1 = x_2$ gilt,

$$p(x) = a_n \underbrace{(x - x_1)(x - x_2)}_{=(x-x_1)^2}\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

hat die Nullstelle $x_1 = x_2$ *Multiplizität* 2.

Wenn das kubische Polynom auf der rechten Seite ausmultipliziert wird,

$$y(x) = (ax^2 + \mu x + \nu)(x - x_3) = ax^3 + \underbrace{(\mu - ax_3)}_{=b} x^2 + \underbrace{(\nu - \mu x_3)}_{=c} x + \underbrace{(-(\nu x_3))}_{=d}$$

gilt $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ genau dann wenn die Koeffizienten übereinstimmen,

$$b = \mu - ax_3, \quad c = \nu - \mu x_3, \quad d = -\nu x_3$$

Wenn man diese Gleichungen nach μ und ν auflöst, bekommt man die grauen Formeln auf Seite 30. (Man merkt, die letzte graue Gleichung $b + ax_3 = -(d + cx_3)/x_3^2$ gilt genau dann, wenn x_3 eine Nullstelle ist: $bx_3^2 + ax_3^3 = -d - cx_3$, d.h. $ax_3^2 + bx_3^2 + cx_3 + d = 0$.)

Beispielsweise gilt für das Polynom $y(x) = 1 - x^3$ unten rechts,

$$y(x) = 1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$$

Für solche Formeln erinnert sich man an

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\
a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
a^4 - b^4 &= (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) \\
& \text{usw}
\end{aligned}
$$

Dann ist die Faktorisierung gegeben durch

$$y(x) = (ax^2 + \mu x + \nu)(x - x_3) = (-x^2 - x - 1)(x - 1)$$

mit $a = -1$, $\mu = -1$, $\nu = -1$ und $x_3 = 1$. Durch die obige Rechnung der Nullstellen auf Seite 26, sieht man dass die anderen 2 Nullstellen dieses kubischen Polynoms gegeben sind durch $-1/2 \pm \imath\sqrt{3}/2$, d.h. sie sind komplex.

Seite 31: Für das biquadratische Polynom $y(x) = (4 - 5x^2 + x^4)/2$ mit der Grafik unten links bekommt man die Faktorisierung durch

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2 - \frac{5}{2}\left(x^2\right) + \frac{4}{2}$$

d.h. $y(x)$ is *quadratisch* in (x^2)! Die Nullstellen müssen daher erfüllen

$$(x^2)_1 = \frac{\frac{5}{2} - \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4(\frac{1}{2})(\frac{4}{2})}}{2(\frac{1}{2})} = 1 \quad \text{oder} \quad (x^2)_2 = \frac{\frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4(\frac{1}{2})(\frac{4}{2})}}{2(\frac{1}{2})} = 4$$

Daher lässt sich das biquadratische Polynom so faktorisieren,

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

wobei $1/2$ der führende Koeffizient ist, d.h. der steht vor x^4 in der Definition von $y(x)$. Dann lassen sich die zwei obigen Faktoren weiter faktorisieren,

$$y(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

wobei $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ verwendet werden kann. Sonst kann man die Nullstellen von $x^2 - 1$ berechnen, d.h. $x_{1,2} = \pm 1$, und es gibt die Faktorisierung $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Analog mit den Nullstellen $x_{1,2} = \{\pm 2\}$ für $x^2 - 4$ folgt die Faktorisierung $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Seite 35: Die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

hat die Nullstelle $x = 0$ und die Polstellen $x = -1$ und $x = +1$. (Die Nullstellen des Nenners nennt man die *Polstellen*.) Die entsprechenden Faktoren dieser Stellen bestimmen das Vorzeichen von $r(x)$. Wie auf Seite 29 erstellt man auch hier eine Tabelle, um das Vorzeichen der rationalen Funktion zu finden. Die Teilintervalle zwischen den Stellen sind $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, +\infty)$. Der Faktor x^2 erfüllt $x^2 > 0$ in jedem dieser Teilintervalle. Der Faktor $(x+1)$ erfüllt $(x+1) > 0$ für $x > -1$ und sonst $(x+1) < 0$. Der Faktor $(x-1)$ erfüllt $(x-1) > 0$ für $x > +1$ und sonst $(x-1) < 0$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x^2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$r(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$

Daher gilt

$$r(x) \begin{cases} > 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty) \\ < 0, & x \in (-1, 0) \cup (0, +1) \end{cases}$$

Mit der Eigenschaft $|r(x)| \to \infty$ für $x \to -1$ oder $x \to +1$, schließt man aus der Tabelle, es muss gelten

$$\begin{aligned} 0 < r(x) \to +\infty, &\quad x \to -1^- \quad \text{d.h. links von } -1 \\ 0 > r(x) \to -\infty, &\quad x \to -1^+ \quad \text{d.h. rechts von } -1 \\ 0 > r(x) \to -\infty, &\quad x \to +1^- \quad \text{d.h. links von } +1 \\ 0 < r(x) \to +\infty, &\quad x \to +1^+ \quad \text{d.h. rechts von } +1 \end{aligned}$$