

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

Übungsblatt 14, Ausarbeitung ab dem 30. Jänner 2017

1. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Interpolation

Gegeben seien die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^3$

$$(1.0, 1.0), \quad (2.0, 1.5) \quad \text{und} \quad (3.0, 1.8)$$

und eine rationale Funktion $r(t) = p(t)/q(t)$ mit $p(t) = a_1t + a_2$ und $q(t) = t + a_3$ soll bestimmt werden, die die Bedingungen erfüllt

$$r(t_i) = r_i \quad \text{oder} \quad p(t_i) = r_i q(t_i) \quad \text{oder} \quad t_i a_1 + a_2 - r_i a_3 = r_i t_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Diese Methode heißt rationale Interpolation. (Hinweis: Diese Daten entsprechen der rationalen Funktion $r = 3t/(t + 2)$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor

$$M = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & -r_1 \\ t_2 & 1 & -r_2 \\ t_3 & 1 & -r_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} r_1 t_1 \\ r_2 t_2 \\ r_3 t_3 \end{bmatrix}$$

(b) Die Parameter der rationalen Funktion

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_1 = 3.0, \quad a_2 = 0.0 \quad \text{und} \quad a_3 = 2.0.$$

Bonus: Lösen Sie das System $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

$$\mathbf{M} = \{\{1, 1, -1.0\}, \{2, 1, -1.5\}, \{3, 1, -1.8\}\}$$

$$\mathbf{b} = \{1.0, 3.0, 5.4\}$$

$$\mathbf{a} = \text{Inverse}[\mathbf{M}].\mathbf{b}$$

(c) Bestätigen Sie mit den berechneten Koeffizienten $\{a_1, a_2, a_3\}$, dass die Interpolationsbedingungen $r(t_i) = r_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt sind.

2. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Regression

Seien t und u wie im letzten Beispiel, aber nun seien die zusätzlichen Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^5$ gegeben,

$$(0.2, 0.3), \quad (0.4, 0.5), \quad (0.8, 0.9), \quad (1.6, 1.3) \quad \text{und} \quad (3.2, 1.8)$$

und eine rationale Funktion $r(t) = p(t)/q(t)$ mit $p(t) = a_1t + a_2$ und $q(t) = t + a_3$ soll bestimmt werden, die die Summe der Quadrate minimiert

$$E(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^5 [t_i a_1 + a_2 - r_i a_3 - r_i t_i]^2$$

Diese Methode heißt rationale Regression. (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der rationalen Funktion $r = 3t/(t + 2)$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & -r_1 \\ t_2 & 1 & -r_2 \\ t_3 & 1 & -r_3 \\ t_4 & 1 & -r_4 \\ t_5 & 1 & -r_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} r_1 t_1 \\ r_2 t_2 \\ r_3 t_3 \\ r_4 t_4 \\ r_5 t_5 \end{bmatrix} \quad \text{und die Produkte } A^\top A, \quad A^\top \mathbf{b}$$

(b) Die Parameter der rationalen Funktion

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $A^\top A \mathbf{a} = A^\top \mathbf{b}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_0 = 2.82056, \quad a_1 = 0.0394805 \quad \text{und} \quad a_2 = 1.84684.$$

Bonus: Lösen Sie das System $A^\top A \mathbf{a} = A^\top \mathbf{b}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

$$\mathbf{A} = \{\{0.2, 1, -0.3\}, \{0.4, 1, -0.5\}, \{0.8, 1, -0.9\}, \{1.6, 1, -1.3\}, \{3.2, 1, -1.8\}\}$$

$$\mathbf{b} = \{0.06, 0.2, 0.72, 2.08, 5.76\}$$

$$\mathbf{a} = \text{Inverse}[\text{Transpose}[\mathbf{A}] . \mathbf{A}] . (\text{Transpose}[\mathbf{A}] . \mathbf{b})$$

(c) Mit den durch rationale Regression berechneten Koeffizienten $\{a_1, a_2, a_3\}$ vergleichen Sie die Werte r_i und $r(t_i)$, $i = 1, \dots, 5$.

3. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Interpolation

Gegeben seien die Daten $\{(t_i, T_i)\}_{i=1}^3$

$$(0.0, 10.0), \quad (1.0, 5.50) \quad \text{und} \quad (2.0, 3.25)$$

und eine exponentielle Funktion $T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t}$ soll bestimmt werden, die die Bedingungen erfüllt

$$T(t_i) = T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Diese Methode heißt exponentielle Interpolation. (Hinweis: Diese Daten entsprechen der exponentiellen Funktion $T = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

- (a) Anhand der ersten Bedingung $10 = T(0) = \alpha + \beta e^{0\nu}$ oder $\beta = 10 - \alpha$ schreiben Sie die anderen Bedingungen

$$5.50 = T(1) = \alpha + \beta e^\nu \quad \text{und} \quad 3.25 = T(2) = \alpha + \beta e^{2\nu}$$

rein bezüglich α und ν um, d.h. ohne β .

- (b) Lösen Sie nach α in den beiden Gleichungen auf, und zeigen Sie mit $x = e^\nu$, es gilt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} = \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)}$$

- (c) Lösen Sie nach x in dieser Gleichung auf, und setzen Sie $\nu = \ln(x)$. Dann ist α durch die letzte Gleichung gegeben, und β ist durch $\beta = 10 - \alpha$ gegeben.
- (d) Bestätigen Sie mit den berechneten Parametern $\{\alpha, \beta, \nu\}$, dass die Interpolationsbedingungen $T(t_i) = T_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt sind.

4. Abschätzung von Exponentialen Funktionen durch Regression

Gegeben seien die Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^5$

$$(0.0, 10.0), \quad (0.5, 7.1), \quad (1.0, 5.0), \quad (1.5, 3.6) \quad \text{und} \quad (2.0, 2.5)$$

und eine Exponentialfunktion $v(s) = ce^{ks}$ soll bestimmt werden, die die Summe der Quadrate

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^5 [(ks_i + d) - \ln(v_i)]^2$$

minimiert. Hier ist die Form des Problems durch $\ln(v) = \ln(ce^{ks}) = ks + d$ mit $d = e^c$ transformiert worden, damit lineare Regression auf die transformierten Daten verwendet werden kann. (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der Exponentialfunktion $v = 10 \cdot 2^{-s}$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

- (a) Führen Sie die logarithmische Transformation durch,

$$y_i = \ln(v_i), \quad x_i = s_i, \quad i = 1, \dots, 5$$

um die transformierten Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ zu erzeugen.

- (b) Durch die Methode der linearen Regression bestimmen Sie die Gleichung $y = k^*x + d^*$ der Gerade, die die Summe der Quadrate

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^4 [(kx_i + d) - y_i]^2$$

minimiert. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ grafisch dar.

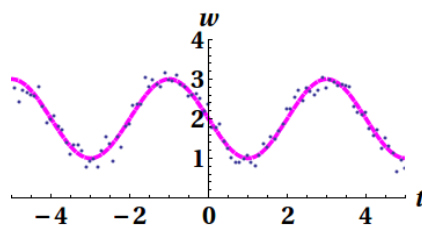
- (c) Mit $y = k^*x + d^*$, $y = \ln(u)$, $x = s$ und $c^* = e^{d^*}$ führen Sie die exponentielle Transformation durch,

$$v = \exp(y) = \exp(k^*x + d^*) = e^{k^*s} e^{d^*} = c^* e^{k^*s}$$

um die Exponentialfunktion $u = c^* e^{k^*s}$ zu bestimmen. Stellen Sie diese Exponentialfunktion zusammen mit den Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^5$ grafisch dar.

5. Abschätzung von Winkelfunktionen

Gegeben seien die grafisch dargestellten Daten,



und eine Winkelfunktion

$$w(t) = c + a \sin[2\pi\omega(t - b)]$$

soll bestimmt werden, die die obigen Daten widerspiegelt. Bestimmen Sie die Parameter $\{a, b, c, \omega\}$ aus der Grafik.