Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften
Übungsblatt 12, Ausarbeitung ab dem 16.Jänner 2017

1. Eingeschränkte Extrema

   Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y) = xy$ über die folgenden Mengen:

   (a) über das Quadrat $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$ und über seinen Rand $\partial Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} = 1\}$

   (b) über die Scheibe $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und über ihren Rand $\partial S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

2. Geometrische Projektion

   (a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $P = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ und der Parabel $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Finden Sie einen Punkt $Q = (x_0, y_0)$ in der Parabel ($y_0 = x_0^2$), in dem dieser minimale Abstand angenommen wird. Ein solcher Punkt Q heißt eine *Projektion* vom Punkt P in die Parabel E.

   (b) Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $P = (2,0,0) \in \mathbb{R}^2$ und der Ebene $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$. Finden Sie einen Punkt $Q = (x_0, y_0, z_0)$ in der Ebene ($x_0 + y_0 + z_0 = 1$), in dem dieser minimale Abstand angenommen wird. Ein solcher Punkt Q heißt eine *Projektion* vom Punkt P in die Ebene E.

3. Lineare Regression

   Für die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und alle x_i verschieden) ist zu zeigen, dass die Funktion

   $$E(k,d) = \sum_{i=1}^{n} [(kx_i + d) - y_i]^2$$

   global über $(k,d) \in \mathbb{R}^2$ in (k^*, d^*) minimiert wird, wobei

   $$k^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad d^* = \bar{y} - k^* \bar{x}$$

   Daher ist die (durch lineare Regression bestimmte) Gerade $y = k^* x + d^*$ eine repräsentative Darstellung der Daten.

   (a) Zeigen Sie, (k^*, d^*) ist ein kritischer Punkt für $E(k,d)$.

   (b) Zeigen Sie, die partiellen Ableitung zweiter Ordnung der Funktion $E(k,d)$ sind

   $$E_{kk}(k,d) = 2n\overline{x^2} > 0, \quad E_{dd}(k,d) = 2n > 0 \quad \text{und} \quad E_{kd} = 2n\bar{x}.$$

   (c) Zeigen Sie, es gilt

   $$\overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

   und daher folgt

   $$E_{kk}(k,d)E_{dd}(k,d) - E_{kd}(k,d)^2 = 4n^2(\overline{x^2} - \bar{x}^2) = \overline{(x - \bar{x})^2} > 0$$

(d) Anhand dieser Ergebnisse ziehen Sie mit Begründung den Schluss, dass die Funktion $E(k,d)$ global konvex ist, und daher wird sie in (k^*, d^*) global über $(k,d) \in \mathbb{R}^2$ minimiert.

4. Polynomiale Regression – Bonus für die Begeisterten!

Für alle notwendigen Hinweise sehen Sie Seite 186 im Skriptum und das 4. Ergänzungsblatt!

Für die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und alle x_i verschieden) wird ein repräsentatives Polynom $p(x) = p_m x^m + \cdots + p_1 x + p_0$ durch Minimierung der Zielfunktion

$$E(p_0, p_1, \ldots, p_m) = \sum_{i=1}^n [(p_m x_i^m + \cdots + p_1 x_i + p_0) - y_i]^2$$

über $\{p_i\}_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ bestimmt.

(a) Zeigen Sie mit

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}, \quad M\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{bmatrix}$$

die Zielfunktion ist gegeben durch

$$E(\boldsymbol{p}) = \|M\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}\|^2$$

(b) Zeigen Sie, der Vektor dieser partiellen Ableitungen $\{\partial_{p_k} E(\boldsymbol{p})\}_{k=0}^m$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\{\partial_{p_k} E(\boldsymbol{p})\}_{k=0}^m = 2(M^\top M\boldsymbol{p} - M^\top \boldsymbol{y})$$

(c) Zeigen Sie, die Matrix $\{\partial_{p_l}\partial_{p_k} E(\boldsymbol{p})\}_{k,l=0}^m$ aller partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\{\partial_{p_l}\partial_{p_k} E(\boldsymbol{p})\}_{k,l=0}^m = 2M^\top M$$

Bemerkung: Wegen der Eigenschaften von $M^\top M$ kann gezeigt werden, dass $E(\boldsymbol{p})$ global konvex ist, und daher wird die Zielfunktion im kritischen Punkt $\boldsymbol{p}^*$ global minimiert, wobei

$$M^\top M \boldsymbol{p}^* = M^\top \boldsymbol{y}$$

5. Rechnungen mit Matrizen und Vektoren

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 5 \end{array}$$

lässt sich bezüglich der Matrix A und der Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

mit $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ umschreiben.

(a) Zeigen Sie durch Gaußsche Elimination und rückwärts Substitution, der Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

löst das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(b) Zeigen Sie durch die Cramersche Regel, der obige Vektor $\boldsymbol{x}$ löst das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(c) Berechnen Sie die Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

durch Eliminationsschritte für das Gleichungssystem $AX = I$ mit $I, X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $X = A^{-1}$ und I die Einheitsmatrix.

(d) Bestätigen Sie, die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenvektoren der Matrix A sind gegeben durch

$$\lambda_1 = 3, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

d.h. mit

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$$

es gilt $AV = V\Lambda$.

(e) Zeigen Sie, die Matrix A ist symmetrisch und positiv definit (SPD).

6. Zeigen Sie, die Bedingungen für ein lokales Minimum in $f(x_0, y_0)$ einer ausreichend differenzierbaren Funktion $f(x, y)$

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \quad f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{und} \quad f_{xy}^2(x_0, y_0) < f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0)$$

sind äquivalent zu der Bedingung dass die Hessematrix $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ SPD ist. Ähnlich ist $f(x_0, y_0)$ ein lokales Maximum für $f(x, y)$, wenn $-\nabla^2 f(x_0, y_0)$ SPD ist.