

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

Übungsblatt 11, Ausarbeitung ab dem 9. Jänner 2017

1. Rotationsflächen

Die folgenden Funktionen hängen nur vom Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zwischen einem Punkt (x, y) und dem Ursprung $(0, 0)$ ab. Daher sind die grafischen Darstellungen durch Rotationsflächen gegeben. Stellen Sie diese grafisch dar:

$$(a) f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 1$$

$$(b) g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad g(0, 0) = 0$$

und anhand der jeweiligen Grafiken erklären Sie in Wörtern, ob und wo die Funktionen stetig und differenzierbar sind.

Hinweise: Stellen Sie jede Funktion in \mathbb{R}^2 für fixiertes $y = 0$ grafisch dar, und drehen Sie die sich ergebende Kurve um die z -Achse in \mathbb{R}^3 . Zur Kontrolle können Sie die folgenden Mathematica-Befehle probieren:

```
Plot3D[Sin[Sqrt[x^2+y^2]]/Sqrt[x^2+y^2], {x, -10, +10}, {y, -10, +10}, PlotRange->All]
```

```
Plot3D[Sqrt[x^2+y^2]Log[Sqrt[x^2+y^2]], {x, -0.7, +0.7}, {y, -0.7, +0.7}, PlotRange->All]
```

2. Stetigkeit und Partielle Differenzierbarkeit

Zeigen Sie, die Funktion

$$f(x, y) = \frac{2yx^2}{x^4 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

ist an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig aber doch *partiell* differenzierbar.

Hinweise: Zeigen Sie, entlang einer Kurve $y = kx^2$ hängt $f(x, y)$ nur von $k \in \mathbb{R}$ ab. Daher ist der Grenzwert für $f(x, y)$ mit $(x, y) = (x, kx^2) \rightarrow (0, 0)$ nicht eindeutig. Für partielle Differenzierbarkeit sind die folgenden Grenzwerte zu kontrollieren:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}$$

Zur Visualisierung der grafischen Darstellung können Sie den folgenden Mathematica-Befehl probieren:

```
Plot3D[2y x^2/(x^4+y^2), {x, -1, +1}, {y, -1, +1}, PlotPoints->100]
```

3. Tangentenebene

(a) Stellen Sie die Funktion grafisch dar

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5} \stackrel{\text{Q.E.}}{=} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

und bestimmen Sie die Tangentenebene durch den Punkt $(2, 3, \sqrt{2})$. Existiert eine (eindeutige) Tangentenebene durch den Punkt $(1, 2, 0)$?

(b) Stellen Sie die Funktion grafisch dar

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6}$$

und bestimmen Sie die Tangentenebene durch den Punkt $(2, 3, \sqrt{3})$. Existiert eine (eindeutige) Tangentenebene durch den Punkt $(1, 2, 1)$?

Zur Visualisierung der grafischen Darstellungen können Sie die folgenden Mathematica-Befehle probieren:

```
Plot3D[{Sqrt[(x-1)^2+(y-2)^2], (x-2)/Sqrt[2]+(y-3)/Sqrt[2]+Sqrt[2]}, {x, 0, 2}, {y, 1, 3}, PlotPoints->100]
```

```
Plot3D[{Sqrt[1+(x-1)^2+(y-2)^2], (x-2)/Sqrt[3]+(y-3)/Sqrt[3]+Sqrt[3]}, {x, 0, 2}, {y, 1, 3}, PlotPoints->100]
```

4. Lokale Extrema

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = \frac{x}{3} \left(\frac{x^2 - 3}{1 + y^2} \right)$$

und begründen Sie Ihre Ergebnisse anhand der Bedingungen der lokalen Extrema.

5. Sattelpunkte

Finden Sie einen Sattelpunkt der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

und begründen Sie Ihr Ergebnis anhand der Charakterisierung eines Sattelpunkts.