

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

Übungsblatt 9, Ausarbeitung ab dem 5. Dezember 2016

1. Bestimmtes Integral durch Grenzwert:

(a) Bestimmen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx$$

durch den Grenzwert einer Riemannschen Summe mit einer Teilung

$$x_i = (i/n)^2, \quad i = 0, \dots, n, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

des Intervalls $[0, 1]$ und mit Auswertungen der Funktion \sqrt{x} in $\hat{x}_i = x_i, i = 1, \dots, n$.

(b) Kontrollieren Sie das Ergebnis durch eine Rechnung des bestimmten Integrals mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnungen.

(c) Vergleichen Sie das Ergebnis mit jenem des 1d. Beispiels des 1. Übungsblatts.

2. Stammfunktionen:

Für die folgenden Funktionen bestimmen Sie eine Stammfunktion

(a) $u'(x)u(x)^p, p \in \mathbb{R}$

(d) $\sin(u(x))u'(x)$

(b) $2^{u(x)}u'(x)$

(e) $\sec^2(u(x))u'(x)$

(c) $\cos(u(x))u'(x)$

(f) $u'(x)/(1 + u^2(x))$

für eine allgemeine Funktion $u(x)$ und für die bestimmte Funktion $u(x) = x$. (Mit solchen Regeln löst man die entsprechenden Hausaufgaben auf Seite 153 im Skriptum.)

3. Rationale Funktionen:

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale anhand der Hinweise.

(a) $\int \frac{1}{2 + 2x + x^2} dx$ Hinweise: quadratische Ergänzung, dann Substitution $u = x + 1$

(b) $\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx$ Hinweise: $x^2 = (x^2 + 2x + 2) - 2(x + 1)$, dann $u = x + 1$, dann Kettenregel

(c) $\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx$ Hinweise: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ dann Partialbruchzerlegung

4. Partielle Integration:

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale durch partielle Integration

(a) $\int x \cos(x) dx$

(c) $\int x e^x dx$

(b) $\int x \ln(x) dx$

(d) $\int e^{2x} \sin(3x) dx$

5. Trigonometrische Identitäten:

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale anhand der Hinweise

(a) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ Hinweise: $x = \sin(\theta)$, trigonometrische Identitäten (i) dann (iv) dann (v)

(b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ Hinweise: $x = \sec(\theta)$, trigonometrische Identität (ii)

wobei die folgenden trigonometrischen Identitäten zur Verfügung stehen:

(i) $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ (ii) $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$
(iii) $2\sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$ (iv) $2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$
(v) $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ (vi) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$