

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

Übungsblatt 8, Ausarbeitung ab dem 28. November 2016

1. Globale Extrema:

Bestimmen Sie die globalen Extrema auf dem gegebenen Definitionsbereich:

(a) $y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$, $D = [-2, +2]$

(b) $y_2(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2)$, $D = [-4, +4]$

(c) $y_3(x) = \text{sign}(x)/(1 + |x|)$, $D = [-1, +1]$

Hinweis: Sehen Sie Seiten 93 und 98 im Skriptum und Beispiel 5c auf Übungsblatt 6.

2. Anwendung der globalen Extrema:

(a) Das Volumen einer Dose soll $\frac{1}{2}$ Liter betragen. Die Dose wird aus Zinn hergestellt, und die Dosenwand besteht oben, unten und seitlich aus einer gleichmäßigen Verteilung von Zinn. Finden Sie den Radius und die Höhe der Dose, die die Zinnkosten pro Dose minimieren.

(b) Die Aushöhlung für einen Tunnel hat einen halbkreisförmigen Querschnitt, der durch die Funktion $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, +1]$ gegeben ist. (Die Längeneinheit für x und y ist Dekameter.) Innerhalb dieser Aushöhlung wird ein Tunnel mit flachen Mauern gebaut, die einen trapezförmigen Querschnitt bilden. Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt (in Quadratmeter) des trapezförmigen Querschnitts, der den Durchfluss maximiert.

3. Findung einer Nullstelle:

Berechnen Sie $\sqrt[3]{2}$ annäherungsweise

(a) mit dem Bisektionsverfahren und

(b) mit dem Newtonschen Verfahren.

Hinweis: Der Wert ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$.

4. Regel der l'Hôpital:

Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$$

5. Implizites Ableiten:

Ein Pizzateig wird mit einer Presse so gemacht, dass ein zylinderförmiger Teig mit Volumen $V = 500\text{cm}^3$ von einer Höhe 10cm bis zu einer Höhe 0.5cm mit Geschwindigkeit 1cm/sek gedrückt wird. Der Pizzateig bleibt praktisch zylinderförmig.

(a) Vorbereitung: Was ist die Beziehung zwischen dem Volumen, dem Radius und der Höhe des Teigs? Was ist die zeitliche Änderungsrate des Volumens und der Höhe? Was sind die Anfangshöhe und die Endhöhe? Wie lang dauert es, bis der Teig auf eine Höhe von 0.5cm zusammen gepresst ist?

(b) Rechnungen mit dem Radius: Was ist der Anfangsradius des Teigzylinders? Was ist die zeitliche Änderungsrate des Radius am Anfang? Was ist der Endradius des Teigzylinders? Was ist die zeitliche Änderungsrate des Radius am Ende?