

# Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

## Übungsblatt 7, Ausarbeitung ab dem 21. November 2016

### 1. Steigende und fallende Funktionen:

Für die Funktion  $r(t) = t/(2t + 3)$  bestimmen Sie die Werte  $t \in \mathbb{R}_+$ , bei denen gilt

$$|r(t) - r^*| < 1/10 \quad \text{wobei} \quad r^* = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$$

Hinweis: Man bestimmt die Stelle  $\tau$ , bei der die *Gleichung* gilt

$$|r(t) - r^*| = 1/10$$

und dann zeigt man wie auf Seite 198 im Skriptum, die gewünschte *Ungleichung* gilt für  $t > \tau$ .

### 2. Bildbereich durch lokale Extrema:

Anhand der lokalen Extrema bestimmen Sie die Bildbereiche der folgenden Funktionen auf den gegebenen Definitionsbereichen.

- (a)  $p_1(x) = (4 - 5x^2 + x^4)/2$ ,  $D = [-2, +2]$
- (b)  $p_2(x) = 1 + x - x^3 - x^4$ ,  $D = [-2, +2]$
- (c)  $r_1(x) = 3x/(1 + x^2)$ ,  $D = [-2, +2]$
- (d)  $r_2(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$ ,  $D = [0, 5] \setminus \{1, 3\}$

Hinweis: Sehen Sie Seiten 31, 35 und 68 im Skriptum.

### 3. Kriterien der lokalen Extrema:

- (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der auf Seiten 92 - 101 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der ersten Ableitung zutrifft.
- (b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der zweiten Ableitung zutrifft.

### 4. Sonderfälle von Extremstellen:

Stellen Sie die folgenden Funktionen  $f_1(x), \dots, f_4(x)$  grafisch dar, und lösen Sie anschließend die Aufgabestellungen.

- (a) Zeigen Sie,  $f_1(x) = x^4$  besitzt eine lokale Minimumstelle in  $x = 0$ , die mit dem Kriterium der ersten Ableitung aber nicht mit dem Kriterium der zweiten Ableitung identifiziert wird.
- (b) Zeigen Sie,  $f_2(x) = \text{sign}(x)/(1 + |x|)$ ,  $x \neq 0$ ,  $f_2(0) = 1$ , besitzt eine lokale Maximumstelle in  $x = 0$ . Findet man diese Stelle mit dem Kriterium der ersten oder der zweiten Ableitung?
- (c) Zeigen Sie,  $f_3(x) = x^3$  hat eine Nullstelle der ersten Ableitung, die keiner lokalen Extremstelle entspricht.
- (d) Zeigen Sie,  $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2}$  besitzt eine lokale Minimumstelle in  $x = 0$ , die mit dem Kriterium der ersten Ableitung aber nicht mit dem Kriterium der zweiten Ableitung identifiziert wird, und zwar gibt es keine zweite Ableitung an dieser Stelle.

5. Wendepunkte:

- (a) Zeigen Sie,  $g_1(x) = x^4$  besitzt eine Nullstelle der zweiten Ableitung in  $x = 0$ , obwohl diese Stelle keinem Wendepunkt entspricht.
- (b) Zeigen Sie,  $g_2(x) = \sqrt[3]{x}$  besitzt keine zweite Ableitung in  $x = 0$ , aber diese Stelle entspricht einem Wendepunkt.
- (c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen.

6. Logistisches Wachstum:

- (a) Für verschiedene Parameter  $(K, t_0, \tau)$  stellen Sie die *logistische Funktion* grafisch dar,

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

Hinweis: Durch diese grafischen Darstellungen wird ersichtlich,  $K$  ist die *Kapazität* einer Population,  $t_0$  ist die *Wendezeit* des Wachstums und  $\tau$  ist die *Zeitskala* des Wachstums.

- (b) Für fixierte Werte  $(K, t_0, \tau)$  zeigen Sie,  $(t_0, K/2)$  ist ein Wendepunkt für die Funktion.
- (c) Mit den Daten  $P(0) = 1$ ,  $P(\ln(2)) = 4/3$  und  $P(\ln(4)) = 8/5$  bestimmen Sie die entsprechenden Parameter  $(K, t_0, \tau)$ .