

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

Übungsblatt 5, Ausarbeitung ab dem 7. November 2016

1. Stetigkeit und Grenzwerte:

Stellen Sie die folgenden Funktionen grafisch dar und erklären Sie mit Begründung (sehen Sie z.B. Seiten 61-62 im Skriptum) wo sie stetig sind.

(a) $y_1(x) = |x|^{2/3}/(1+x^2)$

(b) $y_2(x) = |x| \ln |x|$

(c) $y_3(x) = (x-7)^\pi$

(d) $y_4(x) = \sqrt{(3x-2-x^2)/(x^2+x-2)}$

(e) $y_5(x) = 1/(1+e^{-x})$

Wie bestimmt man den Grenzwert einer dieser Funktionen an einer Stelle, in der die Funktion stetig ist? Welche dieser Funktionen lassen sich *stetig ergänzen*, d.h. den Graphen der Funktion mit einem Punkt (x_0, y_0) erweitern, sodass die erweiterte Funktion an der Stelle x_0 stetig ist?

2. Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts:

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch algebraische Vereinfachung:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^4 - 1)/(x^2 - 1) \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^4 + 1)/(x^2 - 1)$$

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch Eigenschaften der Winkelfunktion:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \tan(\pi x/2) \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} \tan(\pi x/2)$$

(c) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch Eigenschaften der Winkelfunktion:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \sin(1/x) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \sin(x^2)/x^2 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)/|x|$$

wobei ein *Sandwich* nützlich sein kann.

(d) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch Eigenschaften der Logarithmusfunktion gegenüber jenen einer Potenzfunktion:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2(x)/\sqrt{x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$$

(e) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch Eigenschaften der Exponentialfunktion gegenüber jenen eines Polynoms:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)4^{-x} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x/(1+x+x^2) \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2^x)/(e^x + 3^{-x})$$

3. Bisektionsverfahren:

Sehen Sie Übungsblatt 3 für Details über $\tan(x)$ und $\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$.

- (a) Verwenden Sie das Bisektionsverfahren, um die Nullstelle $x_0 \approx 0.7654$ der Funktion

$$f(x) = \frac{1 - 2x \tan^{-1}(x)}{(1 + x^2)^2}$$

auf Seite 101 im Skriptum zu finden. Startwerte werden auch auf Seite 101 vorgeschlagen.

- (b) Verwenden Sie das Bisektionsverfahren, um die Nullstelle $x_1 \approx 1.330$ der Funktion

$$g(x) = \frac{(6x^2 - 2) \tan^{-1}(x) - 6x}{(1 + x^2)^3}$$

auf Seite 116 im Skriptum zu finden. Startwerte werden auch auf Seite 116 vorgeschlagen.

Hinweis: Mit $y(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2)$ sind $f(x)$ und $g(x)$ (die *Steigung*) $y'(x)$ bzw. (die *Steigung der Steigung*) $y''(x)$.

4. Zwischenwertsatz:

- (a) Finden Sie die Nullstellen und die Polstellen der rationalen Funktion

$$r(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-4)(x-6)}$$

- (b) Werten Sie $r(x)$ in 7 Stellen strategisch aus, um das Vorzeichen in den Teilintervallen zwischen Polstellen und Nullstellen zu bestimmen.
(c) Stellen Sie $r(x)$ grafisch dar.

5. Geometrische Reihen:

Ein Student möchte von einem Mittagessenslokal insgesamt 100 Meter bis zu einem Hörsaal gehen. Wegen steigender Müdigkeit schafft er jede Minute nur die Hälfte des verbliebenen Weges.

- (a) Wie weit kommt er nach 10 Minuten?
(b) Wie lang dauert es, bis er 90% des Weges zum Ziel kommt?