Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften
Übungsblatt 4, Ausarbeitung ab dem 31.Oktober 2016

1. Nicht stetige Funktionen:

   (a) Zeigen Sie folgendermaßen, die Funktion $f(x) = \text{sign}(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig: Wählen Sie x-Werte (d.h. $x_1, x_2, \dots$) strategisch aus, die sich an $x_0 = 0$ annähern, während $f(x)$ (d.h. $f(x_1), f(x_2), \dots$) sich nicht an $f(0) = 0$ annähert.

   (b) Zeigen Sie folgendermaßen, die Funktion $g(x) = \sin(1/x)$, $g(0) = 0$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig: Wählen Sie x-Werte (d.h. $x_1, x_2, \dots$) strategisch aus, die sich an $x_0 = 0$ annähern, während $g(x)$ (d.h. $g(x_1), g(x_2), \dots$) sich nicht an $g(0) = 0$ annähert.

2. Grenzwerte durch Komposition:

   (a) Nützen Sie die Eigenschaften, dass $1/x^k \to 0$ gilt für $k > 0$ und $|x| \to \infty$, um den Grenzwert zu bestimmen:
$$\lim_{x\to+\infty} r(x), \quad r(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}$$

   (b) Nützen Sie die Stetigkeit einer Logarithmusfunktion aus und bestimmen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to 1} g(x), \quad g(x) = \ln(x)$$

   (c) Anhand der letzten zwei Grenzwerte bestimmen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to+\infty} g(r(x))$$
   Bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch Auswertung der Funktion $g(r(x))$ in immer größeren x-Werten.

   (d) Wiederholen Sie diese Schritte ((a) bis (c)) für $f(x) = \exp(1/x)$, um die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ und $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ zu bestimmen. Betrachten Sie hierfür die Komposition $f(x) = y(s(x))$ mit $y(x) = \exp(x)$ und $s(x) = 1/x$.

3. Grenzwerte von Summen und Differenzenquotienten:

   (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$
   Hinweis: Verwenden Sie die Summenformeln ($\sum_{i=1}^{n} i^k = \cdots$, $k = 1, 2, \dots$) im Skriptum, um jede Summe bezüglich einer rationalen Funktion von n umzuschreiben.

   (b) Bestimmen Sie die Grenzwerte
$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h) - 1} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{(1+h) - 1}$$
   Hinweis: Verwenden Sie eine algebraische Formel ($(a^n - b^n) = (a - b)(\cdots)$ bzw. $(a - b) = (a^n - b^n)/(\cdots)$) im Skriptum, um in jedem Differenzenquotienten einen gemeinsamen Faktor im Zähler und im Nenner zu kürzen. Anschließend nützen Sie die Stetigkeit der sich ergebenden Funktion aus.

4. Flächeninhalt als Grenzwert:

   Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_i = i/n$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

   (a) Mit $y(x) = x$ bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $[x_{i-1}, x_i] \times [0, y(x_i)]$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   (b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Summe solcher Vierecke über $i = 1, \ldots, n$.

   (c) Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Summe für $n \to \infty$.

   Hinweis: Sehen Sie die erste Summe im Beispiel (3a). Der Grenzwert ist der Flächeninhalt (1/2) des Dreiecks mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$.

   (d) Wiederholen Sie diese Schritte für $f(x) = x^3$. Hinweis: Sehen Sie die zweite Summe im Beispiel (3a).

5. Steigung als Grenzwert:

   (a) Für die Funktion $y(x) = x^3$ bestimmen Sie die Steigung einer Sekantengerade durch die Punkte $(1, y(1))$ und $(1 + h, y(1 + h))$.

   (b) Vereinfachen Sie die Steigung der Sekantengerade und bestimmen Sie ihren Grenzwert für $h \to 0$.

   Hinweis: Sehen Sie den ersten Differenzenquotienten im Beispiel (3b). Der Grenzwert ist die Steigung (1/2) der Tangentengerade an der Stelle $x = 1$.

   (c) Wiederholen Sie diese Schritte für $f(x) = \sqrt{x}$. Hinweis: Sehen Sie den zweiten Differenzenquotienten im Beispiel (3b).