Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften
Übungsblatt 2, Ausarbeitung ab dem 17.Oktober 2016

1. Geraden und Ungleichungen:

   (a) Gegeben seien die Punkte $P(1,1)$, $Q(3,2)$ und $R(0,2)$. Bestimmen Sie Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y_3(x)$, deren Graphen den Geraden durch $P\&Q$, $Q\&R$ bzw. $R\&P$ entsprechen.

   (b) Stellen Sie das Dreieck mit Eckpunkten P, Q und R (i) grafisch im $\mathbb{R}^2$ sowie (ii) als Menge in der Mengennotation (Formeln) dar. Hierbei soll der Rand des Dreiecks in der Menge enthalten sein.

   (c) Stellen Sie das Innere dieses Dreiecks als Menge in der Mengennotation (Formeln) dar.

2. Hyperbeln und Ungleichungen:

   (a) Bestimmen Sie Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, die erfüllen,

   $$y_1(x)^2 - x^2 = 1 = y_2(x)^2 - x^2, \quad y_1(x) < 0, \quad y_2(x) > 0.$$

   (b) Stellen Sie die Mengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < y_2(x)\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > y_1(x)\}$ grafisch dar.

   (c) Stellen Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 1\}$ (i) grafisch im $\mathbb{R}^2$ sowie (ii) in der Mengennotation mit y_1 und y_2 dar.

   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie den Wolfram Befehl `ContourPlot` probieren:

3. Parabeln und Ungleichungen:

   (a) Finden Sie die Nullstellen der Funktion $q(x) = -6 - 4x + 2x^2$.

   (b) Faktorisieren Sie diese Funktion in die Form $q(x) = c(x - x_1)(x - x_2)$ für $c, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

   (c) Anhand dieser Faktorisierung erstellen Sie eine Tabelle mit dem Vorzeichen der jeweiligen Faktoren sowie der Funktion q in den Teilintervallen zwischen Nullstellen.

   (d) Stellen Sie die Funktion grafisch dar.

   (e) Anhand der Tabelle und der Grafik bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : q(x) < 0\}$.

   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie die folgenden Wolfram Befehle probieren:

   ```
   Solve[-6 - 4x + 2x^2 == 0,x]
   Plot[-6 - 4x + 2x^2,{x,-2,4}]
   Reduce[-6 - 4x + 2x^2 < 0,x]
   ```

4. Kubische und Biquadratische Polynome:

   (a) Finden Sie die Nullstellen der Funktion $k(x) = -18x - 3x^2 + 3x^3$, stellen Sie $k(x)$ grafisch dar und anhand der Grafik bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : k(x) \geq 0\}$.

   (b) Finden Sie die Nullstellen der Funktion $b(x) = -24 - 4x^2 + 4x^4$, stellen Sie $b(x)$ grafisch dar und anhand der Grafik bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : b(x) < 0\}$.

   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie die obigen Wolfram Befehle `Solve`, `Plot` und `Reduce` probieren.

5. Polynomdivision:

Die zwei Nullstellen $x = -2$ und $x = 3$ des Polynoms $b(x) = -6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4$ sei (durch Versuch und Irrtum) gegeben. Daher sind $(x + 2)$ und $(x - 3)$ Faktoren von $b(x)$.

(a) Führen Sie Polynomdivision durch, um das Polynom $k(x) = b(x)/(x + 2)$ zu bestimmen.

(b) Führen Sie Polynomdivision durch, um das Polynom $q(x) = k(x)/(x - 3)$ zu bestimmen.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $b(x) = (x + 2)k(x) = (x + 2)(x - 3)q(x)$ und stellen Sie $b(x)$ grafisch dar.

Hinweis: Zur Kontrolle können Sie die folgenden Wolfram Befehle probieren:

```
Simplify[(-6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4)/(x + 2)]
Solve[-6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4 == 0, x]
Plot[-6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4 == 0, {x,-3,4}]
```