

## Beispiele des Vorausgesetzten Wissens für GEO MSE, Wintersemester 2016

### 1. Rechnungen und Vereinfachungen mit Bruchausdrücken

- (a) Fassen Sie äquivalente Notationen für Multiplikation und Division zusammen. Geben Sie auch Beispiele an.
- (b) Fassen Sie die Reihenfolge zusammen, in der die Rechenoperationen Multiplikation, Division, Addition und Subtraktion in einem Ausdruck mit und ohne Klammern durchgeführt werden sollen. Geben Sie auch Beispiele an.
- (c) Fassen Sie die Notation für einen Dezimalpunkt auf einem üblichen Taschenrechner (oder bei den bekannten Rechnensystemen) zusammen. Geben Sie auch Beispiele an.
- (d) Schreiben Sie (Prim-)Faktorisierungen der Zahlen 24 und 30. Verwenden Sie diese Faktorisierungen, um  $24/30$  mit einem größten gemeinsamen Teiler (ggT) zu kürzen. Verwenden Sie diese Faktorisierungen, um  $1/24 + 1/30$  zu kombinieren.
- (e) Obwohl der Ausdruck  $5\frac{4}{5}$  im täglichen Leben oft als "fünf und vier fünftel" (d.h.  $5 + \frac{4}{5}$ ) verstanden wird, ist dies hier nicht der Fall! Zitieren Sie die Multiplikationsregel, mit der  $5\frac{4}{5} = 4$  zu verstehen ist.

Vereinfachen Sie die Ausdrücke

(f)  $5$  und  $\frac{4}{5} + 3$  und  $\frac{1}{6} - 4$  und  $\frac{3}{8} + 2$  und  $\frac{7}{12} - 1$  und  $\frac{11}{24}$

(g)  $\left(7 \text{ und } \frac{3}{4} - 4 \text{ und } \frac{3}{8}\right) \frac{4}{9} + \frac{3 \text{ und } \frac{2}{3} + 2 \text{ und } \frac{7}{12}}{\frac{5}{6}}$

(h)  $\frac{\frac{11}{15} + \frac{9}{20} - \frac{9}{12} - \frac{1}{15}}{\frac{1}{8} + \frac{\frac{14}{15} + \frac{29}{60}}{\frac{7}{18} + \frac{11}{30}}}$

### 2. Rechnungen von Prozentsätzen

- (a) Man überlegt die Möglichkeit, selbständig zu arbeiten. Es wird abgeschätzt, dass das Bruttoeinkommen €4000 monatlich betragen sollte, aber nachdem €1500 monatlich für Lohnnebenkosten abgezogen wären, würden nur €2500 monatlich für das Nettoeinkommen übrig bleiben. Welcher Prozentsatz des Bruttoeinkommens wäre das Nettoeinkommen?
- (b) Im Lauf einer chemischen Reaktion beginnt die Konzentration einer Chemikalie bei 1 Mol/Liter, und während sie sich immer erhöht, nähert sich die Konzentration an 11 Mol/Liter. Welche Konzentration entspricht 90% des Weges von der anfänglichen bis zur letztendlichen?
- (c) Die Heizung in einem Haus wird plötzlich ausgeschaltet, und die Innentemperatur sinkt allmählich von der anfänglichen bei 22° bis zur unbekanntem Außentemperatur. Es wird aber später bestimmt, wenn die Innentemperatur 15° beträgt, ist sie 70% des Weges von der anfänglichen bis zur letztendlichen. Was ist die Außentemperatur?

### 3. Rechnungen und Vereinfachungen mit Algebraischen Termen

Vereinfachen Sie den Ausdrücke:

(a)  $15x - 4y + 4z - (2x - 3y - z - (-x + 4y - 3z)) - (5x - y - (2z - 3x) + x)$

- (b)  $5a^2 + b^2 - (3a^2 + 2ab - (2ab - b^2))$
- (c)  $(9r - 7s)(-2) + (3s + 4r)(-5)$
- (d)  $(3a^2bx^2)(-5a^2b^3x)$
- (e)  $(2x^3 - 5x^2y + 4xy^2 - 3y^2)(3x^2 + 2xy - y^2)$
- (f)  $(5x - 4y)^2 - (-5x + 4y)^2$

Erweitern Sie die Ausdrücke:

- (g)  $(a + b)^n$  und für  $(a - c)^n$ , d.h. schreiben Sie die Binomialformel für diese Ausdrücke für einige Potenzen  $n$ .
- (h)  $(2x + 3y)^3$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

- (i) 
$$\frac{36x^4y^3z^2 - 42x^4y^5z^6 + 18x^5y^4z^3 - 48x^3y^6z^5}{6x^3y^3z^2}$$
- (j) 
$$\frac{6a^4 - 9a^3 + 12a^2 - 15a}{3a}$$

#### 4. Herausheben und Dividieren

Heben Sie möglichst viele Faktoren heraus:

- (a)  $5k + 5m + 5$
- (b)  $36k^3 + 27k^2 - 18k$

Faktorisierung Sie den Ausdruck:

- (c)  $(a - b)c - a + b$

Berechnen Sie die Quotienten:

- (d)  $(10x^2 + 29xy - 21y^2) \div (5x - 3y)$
- (e)  $(3k^3 + 8k^2 - 5k - 6) \div (3k + 2)$

#### 5. Algebraische Lösung von Gleichungen

Lösen Sie nach  $x$  in der Gleichung auf:

- (a)  $2x - 12 = 7x - (1 - 3x - (4 - 5x))$
- (b)  $3(2x - 8) - 2(4 - 3x) = 20x$
- (c)  $x(x - 4) + 2x^2 = 3(x + 2)(x - 3)$
- (d)  $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = 3(x + 4)^2$
- (e)  $ax^2 + bx + c = 0$  für gegebene fixierte Zahlen  $a, b, c$ ,  
d.h. geben Sie die Lösungsformeln für die quadratische Gleichung an.
- (f)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
- (g)  $\frac{x^2}{3} - \frac{17x}{36} - \frac{11}{4} = 0$
- (h)  $(2x - 3)^2 + (2x - 4)^2 = 4(x - 1)^2$
- (i)  $\frac{3x + 2}{x - 9} - \frac{1 - 2x}{x + 3} = \frac{19}{(x - 9)(x + 3)}, \quad x \neq -3, 9$

#### 6. Erweitern und Kürzen von Brüchen

(a) Lösen Sie nach  $u$  in der Gleichung auf,

$$\frac{5x-1}{2x-3} = \frac{u}{x(2x-3)^2}, \quad x \neq 0, \frac{3}{2}$$

(b) Geben Sie die Faktorisierung der Differenz von gleichen Potenzen  $a^n - b^n$  und  $a^n + c^n$  für einige Potenzen  $n$  an. Für  $a \neq b$  vereinfachen Sie  $(a^n - b^n)/(a - b)$  für einige Potenzen  $n$ .

(c) Lösen Sie nach  $v$  in der Gleichung auf,

$$\frac{x+y}{6a(x-y)} = \frac{v}{48a^3(x^2-y^2)}, \quad x \neq \pm y, \quad a \neq 0$$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

(d)  $\frac{18x^3y^2}{24x^2y}$

(e)  $\frac{6a^2b + 2ab^2}{18a^2 - 2b^2}$

(f)  $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

## 7. Faktorisierung und Vereinfachung

Faktorisieren Sie die Ausdrücke:

(a)  $6x^2y^3 + 18xy^4$

(b)  $49x^2 - 36y^2$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

(c)  $x^2 - 4x + 4$

(d)  $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(e)  $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Schreiben Sie den Ausdruck als *ein* Bruch und vereinfachen Sie:

(f)  $\frac{4a-9b}{2ab} - \frac{b+2a}{12a^2} - \frac{a-7b}{4b^2}$

(g)  $\frac{2}{x+y} - \frac{1}{x-y} - \frac{3y}{y^2-x^2} + \frac{xy}{x^3+y^3}$

(h)  $\frac{1}{a^2-a} + \frac{1}{a^2+a}$

(i)  $\frac{\frac{x-1}{x}}{x^2-1} \frac{1+x}{1-x}$   
 $\frac{1}{4x^2}$

## 8. Bruchgleichungen

Lösen Sie nach  $x$  in der Gleichung auf:

(a)  $\frac{5}{x-6} = \frac{5}{2}, \quad x \neq 6$

(b)  $\frac{3}{2x-1} = \frac{2}{x+3}, \quad x \neq -3, \frac{1}{2}$

$$(c) \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+8)}{x^2-4}, \quad x \neq \pm 2$$

## 9. Rechnen mit Potenzen

Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

$$(a) a^{x+2y} a^{3x+2z} \text{ und } \frac{a^{x+2y}}{a^{3x+2z}}$$

$$(b) (x^a - y^b)(x^a + y^b) - (x^a - y^b)^2$$

$$(c) \left( \frac{a^2 - b^2}{x + y} \right)^n \left( \frac{x + y}{a + b} \right)^n$$

$$(d) ((a^2)^{-4})^{-3} - ((a^{-8})^{-1})^{+3}$$

$$(e) \frac{a^x b^y (b-1)}{a^{x-1} b^{y-1} (1-b)^2}$$

## 10. Textaufgabe mit Gleichungen, Beträgen und Ungleichungen

Jemand hat die Wahl zwischen zwei Stromtarifen: Entweder (1) monatlich €8 Grundgebühr und €0,10 pro kWh oder (2) kein Grundgebühr und €0,18 pro kWh.

- Bei welchem monatlichen Stromverbrauch sind die Kosten bei beiden Tarifen gleich?
- Bei welchem beträgt der Unterschied €10?
- Bei welchem ist der erste, bei welchem der zweite Tarif günstiger?

## 11. Mengen und ihre Elemente und Teilmengen

- Fassen Sie das Konzept einer Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.
- Fassen Sie das Konzept der Elemente einer Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit den Notationen  $\in$  und  $\notin$  an.
- Fassen Sie das Konzept einer Teilmenge einer Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit den Notationen  $\subset$  und  $\not\subset$  an.

## 12. Mengen durch Bedingungen

- Fassen Sie das Konzept einer Mengendefinition

{Elemente in einer Menge : (wobei) Bedingung erfüllt wird}

zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

- Fassen Sie das Konzept einer Mengendefinition mit mehreren Bedingungen

{Elemente in einer Menge : (wobei) Bedingung 1 *und* 2 erfüllt werden}

oder

{Elemente in einer Menge : (wobei) Bedingung 1 *oder* 2 erfüllt werden}

zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

- Fassen Sie das Konzept des Durchschnitts von zwei Mengen zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.
- Fassen Sie das Konzept der Vereinigung von zwei Mengen zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

- (e) Fassen Sie das Konzept der Differenz von zwei Mengen zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.
- (f) Fassen Sie das Konzept des Komplements einer Teilmenge einer Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.
- (g) Fassen Sie das Konzept der leeren Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

### 13. Zahlenmengen

- (a) Fassen Sie die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  zusammen. Geben Sie Beispiele an.
- (b) Fassen Sie die natürlichen Zahlen plus Null  $\mathbb{N}_0$  zusammen. Geben Sie Beispiele an.
- (c) Fassen Sie die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  zusammen. Geben Sie Beispiele an.
- (d) Fassen Sie die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  zusammen. Geben Sie Beispiele an.
- (e) Fassen Sie die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  zusammen. Geben Sie Beispiele an.
- (f) Fassen Sie die irrationalen Zahlen  $\mathbb{I}$  zusammen. Geben Sie Beispiele an.
- (g) Fassen Sie die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  zusammen. Geben Sie Beispiele an.

### 14. Ungleichungen und Intervalle

- (a) Erklären Sie die Bedeutung der Symbole  $=$ ,  $\neq$ ,  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$  und  $\geq$ . Erklären Sie den Unterschied zwischen strengen und nicht strengen Ungleichungen.
- (b) Geben Sie die Bedeutung des Symbols  $\forall$  an, und erklären Sie die Änderungen einer Ungleichung  $x \leq y$  wenn (a) eine Konstante auf beiden Seiten summiert wird, (b) eine positive Konstante auf beiden Seite multipliziert wird und (c) eine negative Konstante auf beiden Seite multipliziert wird.
- (c) Erklären Sie die Bedeutung der Intervallnotationen  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  und  $(a, b]$ .

### 15. Cartesische Produkte und Höhere Dimensionen

- (a) Fassen Sie das Konzept eines Cartesischen Produkts  $A \times B$  zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$  zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.
- (b) Fassen Sie das Konzept eines Cartesischen Produkts  $A \times B \times C$  zwischen drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.
- (c) Erklären Sie die reelle Ebene  $\mathbb{R}^2$  und den reellen Raum  $\mathbb{R}^3$  bezüglich Cartesischer Produkte.

### 16. Potenzrechnungen mit Reellen Zahlen

- (a) Geben Sie die Dezimaldarstellung an:  
 $10^n$  für  $n = -1, 0, +3$ .
- (b) Geben Sie die Dezimaldarstellung an:  
 $3.14 \times 10^n$  für  $n = -1, 0, +3$ .
- (c) Schreiben Sie die Taschenrechnerdarstellung in die Dezimaldarstellung um:  
 $3.14\text{e-}01$ ,  $2.718\text{e+}00$  und  $1.618\text{e+}03$ .

Um das Konzept der Potenzrechnung zu erläutern, erklären Sie die händische Bestimmung der Dezimaldarstellung der folgenden Zahlen:

$$(d) \sqrt{2}, 2^{\frac{1}{2}} \quad (e) 4^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{2}{3}} \quad (f) \pi^2 \quad (g) 3^e \quad (h) e^\pi$$

Hier ist  $\pi = 3.14159 \dots$  das Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises und  $e = 2.71828 \dots$  ist die Eulerische Zahl.

## 17. Algebraische Lösung von einem Gleichungssystem

Finden Sie Lösungen für  $x$  und  $y$  im Gleichungssystem:

$$(a) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

## 18. Rechnungen mit Winkelfunktionen

- (a) Ein Baum wirft einen Schatten 100m lang, und der Winkel zwischen dem Boden und der Linie von der Schattenspitze bis zur Baumspitze beträgt  $30^\circ$ .
- Bestimmen Sie die Höhe des Baums.
  - Ein Seil wird zwischen der Schattenspitze und der Baumspitze aufgespannt. Bestimmen Sie die Länge des Seils.
- (b) Ein 10m langer Fahnenmast wird aufgestellt, und zu einer gewissen Tageszeit wirft der Fahnenmast einen  $10/\sqrt{3}$ m langen Schatten. Der Winkel zwischen dem Boden und der Linie von der Schattenspitze bis zur Fahnenmastspitze kann verwendet werden, um die Uhrzeit zu bestimmen. Was ist der Winkel zu dieser Tageszeit? Wie lang ist die Linie von der Schattenspitze bis zur Fahnenmastspitze?
- (c) Eine Seilrutsche wird konstruiert. Man steigt eine 50m hohe Leiter bis zu einem Podest hinauf. Damit nicht so steil gerutscht wird, soll der Winkel zwischen der Leiter und dem Seil  $60^\circ$  betragen. Wie lang ist das entsprechende Seil? Wie groß ist der Abstand am Boden zwischen der Leiter und dem Seil?

## 19. Bestimmung von Geraden

Die Ebene  $\mathbb{R}^2$  wird mit senkrechten Koordinatenachsen markiert. Einheiten entlang der waagerechten Achse sind mit  $x$  bezeichnet, und Einheiten entlang der senkrechten Achse sind mit  $y$  bezeichnet. Waagerechts nach rechts bedeutet,  $x$  erhöht sich durch die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Senkrecht nach oben bedeutet,  $y$  erhöht sich durch die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ .

- (a) Eine Gerade liegt in der Ebene, und die Punkte mit  $(x, y)$ -Koordinaten  $(1, 2)$  und  $(3, 4)$  liegen auf dieser Gerade. Schreiben Sie eine Gleichung der Form  $y = sx + a$  für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene.
- (b) Eine Gerade liegt in der Ebene, und sie enthält den Punkt mit  $(x, y)$ -Koordinaten  $(-4, 1)$ . Von diesem Punkt kommt man durch 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach unten zurück zu der Gerade. Schreiben Sie eine Gleichung der Form  $y = sx + a$  für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene.
- (c) Eine Gerade liegt in der Ebene, und sie kreuzt die  $x$ -Achse im Punkt mit  $x = 1$ . Der Winkel zwischen dieser Gerade und der  $x$ -Achse ist  $45^\circ$ . Schreiben Sie eine Gleichung der Form  $y = sx + a$  für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene. Wiederholen Sie die Aufgabe für die Winkel  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$ .
- (d) Eine waagerechte Gerade in der Ebene läuft durch den Punkt mit  $(x, y)$ -Koordinaten  $(1, 2)$ . Schreiben Sie eine Gleichung der Form  $y = sx + a$  für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene.
- (e) Eine senkrechte Gerade in der Ebene läuft durch den Punkt mit  $(x, y)$ -Koordinaten  $(2, 1)$ . Schreiben Sie eine Gleichung der Form  $x = sy + a$  für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene.