Scriptum für das Proseminar aus Analysis III

1. *Kenne ich einen Banachraum und einen Hilbertraum?*

   Jeder Hilbertraum ist ein Banachraum. Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Vektorraum. Ein Hilbertraum hat eine zusätzliche Struktur: ein Innenprodukt. Eine Menge ohne eine Norm ist kein Banachraum, da die Vollständigkeit von der Norm abhängt.

   Die mit der Sup-Norm $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ ausgestattete Menge $C^0([0,1])$ bildet einen Banachraum, der notwendigerweise kein Hilbertraum ist: Die Sup-Norm erfüllt das Parallelogramm-Gesetz ($\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$) nicht, und daher ist es nicht möglich ein Innenprodukt ($\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\|f+g\|^2 - \frac{1}{4}\|f-g\|^2$) damit zu definieren.

   Die mit dem Innenprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ausgestattete Menge $L^2([0,1])$ bildet einen Hilbertraum mit der Norm $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$, die das Parallelogramm-Gesetz erfüllt. Die zusätzliche Struktur in Hilberträumen ist wichtig zum Beispiel für Projektionen, d.h. nächste Approximationen in Unterräumen, die sehr wichtig in Anwendungen sind. Im Gegensatz zu Hilberträumen ist es im allgemeinen nicht möglich, eine Projektion in Banachräumen zu definieren.

2. *Kenne ich einen nicht vollständigen normierten Vektorraum V? Kann ich ein "Loch" in V demonstrieren, d.h. $V \ni v_n \to v \notin V$?*

   Die mit der L^1-Norm $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ ausgestatteten $C^1([0,1])$-Funktionen bilden keinen vollständigen Vektorraum, da die Folge $\{\phi_n(x) = [x^2 + n^{-2}]^{1/2}\}$ in der L^1-Norm gegen $\chi(x) = |x| \notin C^1([0,1])$ konvergiert.

3. *Habe ich ein Beispiel $\chi \in C^0\backslash C^1$? Kenne ich verschiedene Beispiele stetiger aber nicht differenzierbarer Funktionen?*

   Die Funktion $\chi_1(x) = |x| \in C^0\backslash C^1$ ist stetig aber nicht differenzierbar in $x = 0$. Es gibt einen Sprung in $\chi_1'(x)$. Die Ableitung von $\chi_2(x) = |x|^{2/3}$ existiert in $x = 0$ nicht, da sie beträglich unendlich ist: $\chi_2'(0^\pm) \to \pm\infty$. Wegen der Schwingungen existiert die Ableitung von $\chi_3(x) = x\sin(1/x)$ in $x = 0$ nicht. Zusammengefasst sind die möglichen Gründe der nicht differenzierbarkeit: Sprünge, Unendlichkeiten und Schwingungen in der Ableitung.

4. *Habe ich ein Beispiel $\theta \in C^1\backslash C^2$? Kenne ich eine differenzierbare aber nicht stetig differenzierbare Funktion?*

   Die C^1-Funktion
   $$\theta(x) = \int_0^x |t|dt = \begin{cases} x^2/2, & x \geq 0 \\ -x^2/2, & x \leq 0 \end{cases}$$
   liegt in C^2 nicht, weil die Ableitung $\theta'(x) = |x|$ in $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Für $p \in (1,2]$ ist $f(x) = |x|^p \sin(1/x)$ differenzierbar für alle x,
   $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \mathrm{sgn}(h)|h|^{p-1}\sin(1/h) = 0, \qquad (p-1>0)$$
   aber
   $$f'(x) = \mathrm{sgn}(x)p|x|^{p-1}\sin(1/x) - |x|^{p-2}\cos(1/x)$$
   ist in $x = 0$ nicht stetig. Wenn $p = 2$ gilt, hat $|x|^{p-2}\cos(1/x) = \cos(1/x)$ in $x = 0$ böse Schwingungen. Wenn $0 < p < 1$ gilt, ist $|x|^{p-2}$ in $x = 0$ unbeschränkt.

5. *Kenne ich eine nicht sprungstetige Funktion $f \in L^1$? Kenne ich verschiedene Beispiele nicht stetiger Funktionen? Kenne ich die nicht integrierbaren Funktionen x^p?*

   Die Funktionen $f(x) = \sin(1/x)$ und $g(x) = 1/x$ sind in $x = 0$ keine sprungstetigen Funktionen, da die einseitigeren Grenzwerte nicht existieren. Die Funktion $h(x) = \mathrm{sgn}(x)$ ist sprungstetig aber nicht stetig in $x = 0$. Zusammengefasst sind die möglichen Gründe der nicht Stetigkeit: Sprünge, Unendlichkeiten und Schwingungen in der Funktion. Die Funktionen x^p erfüllen:

$$\int_0^1 x^p dx \ldots \begin{cases} < \infty, & p > -1 \\ = \infty, & p \leq -1 \end{cases} \qquad \int_1^\infty x^p dx \ldots \begin{cases} < \infty, & p < -1 \\ = \infty, & p \geq -1 \end{cases}$$

und daher ist x^p auf $[0, 1]$ für $p \leq -1$ und auf $[1, \infty)$ für $p \geq -1$ nicht integrierbar.

6. *Kenne ich eine beschränkte aber nicht Riemann integrierbare Funktion, und kann ich zeigen, daß sie nicht Riemann integrierbar ist?*

   Mit einer beliebigen Zerlegung $0 = x_0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ des Intervalls $[0, 1]$, definere die Funktionen:

$$f_\mathrm{o}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i)} f(x), & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ & i = 1, n-1 \\ \sup\limits_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \qquad f_\mathrm{u}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i)} f(x), & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ & i = 1, n-1 \\ \inf\limits_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

   für

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \boldsymbol{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Da die folgenden gelten,

$$0 = f_\mathrm{u}(x) \leq f(x) \leq f_\mathrm{o}(x) = 1, \qquad \int_0^1 f_\mathrm{u}(x) dx = 0, \qquad \int_0^1 f_\mathrm{o}(x) dx = 1$$

   ist $f(x)$ auf $[0, 1]$ nicht Riemann integrierbar.

7. *Kann ich die Höldersche Ungleichung* oder *die Minkowskische Ungleichung* oder *die Äquivalenz der p-Norm und der q-Norm für $f, g \in L^\infty([a, b])$ oder für $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ zeigen?*

   Seien $f, g \in L^\infty([a, b])$. Die Ergebnisse folgen für Vektoren $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ wenn f und g in einer endlichen Zahl von Punkten konzentriert werden, d.h. die Integrale werden Summen.

   Hölder. Mit $p, q \geq 1$ und $1/p + 1/q = 1$ impliziert die Ungleichungen $ab \leq a^p/p + b^q/q$:

$$\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left[\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right]^p + \frac{1}{q} \left[\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right]^q.$$

   Durch Integration folgt:

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \int \frac{f(x)g(x)}{\|f\|_p \|g\|_q} dx \leq \int \left\{ \frac{1}{p} \left[\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right]^p + \frac{1}{q} \left[\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right]^q \right\} dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

   Minkowski. Die Dreiecksungleichung impliziert:

$$\|f + g\|_p^p = \||f + g|^{p-1}|f + g|\|_1 \leq \||f + g|^{p-1}|f|\|_1 + \||f + g|^{p-1}|g|\|_1.$$

   Mit $p, q \geq 1$ und $1/p + 1/q = 1$ oder $(p-1)q = p$ impliziert Hölder:

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \||f + g|^{(p-1)q}\|_1^{1/q} + \|g\|_p \||f + g|^{(p-1)q}\|_1^{1/q} = [\|f\|_p + \|g\|_p] \|f + g\|_p^{p/q}$$

   oder:

$$\|f + g\|_p = \|f + g\|_p^{p-p/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

   Norm Äquivalence. Mit $1 \leq p \leq q$, $r = q/p$ und $1/r + 1/s = 1$ impliziert Hölder:

$$\|f\|_p^p = \||f|^p 1\|_1 \leq \||f|^p\|_r \cdot \|1\|_s = \||f|^{pr}\|_1^{1/r} (b-a)^{1/s} = \|f\|_q^p (b-a)^{1-p/q}$$

   oder:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q (b-a)^{1/p-1/q}.$$

8. *Verstehe ich die partiellen Integrationen, die für den Einheitskugelinhalt* oder *für die Regeln der numerischen Integration verwendet wurde?*

   Für den Einheitskugelinhalt (cf. Forster, S. 145):

$$c_n = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \dots t = \cos(x) \dots = \int_0^\pi \sin^n(x)dx = \int_0^\pi \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx.$$

   Durch partielle Integration,

$$\begin{aligned} c_n &= \sin^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)dx \\ &= (n-1)\int_0^\pi [1-\sin^2(x)]\sin^{(n-2)}(x)dx = (n-1)[c_{n-2} - c_n] \end{aligned}$$

   folgt die Rekursion $c_n = (1-1/n)c_{n-2}$.

   Für die Trapezregel:

$$\int_a^b v''(x)f(x)dx = v'(x)f(x) - v(x)f'(x)\Big|_a^b + \int_a^b v(x)f''(x)dx$$

   und im allgemeinen:

$$\int_a^b v^{(n)}(x)f(x)dx = \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m v^{(n-1-m)}(x)f^{(m)}(x)\Big|_a^b + (-1)^n\int_a^b v(x)f^{(n)}(x)dx.$$

9. *Kann ich Polynome unter Nebenbedingungen bestimmen, z.B. für die Fehlerabschätzung der Simpsonschen Regel* oder *der Trapezregel?*

   Für die Trapezregel:

$$\begin{aligned} \int_0^h f(x)dx = \int_0^h v''(x)f(x)dx &= v'(x)f(x) - v(x)f'(x)\Big|_0^h + \int_a^b v(x)f''(x)dx \\ &= \frac{1}{2}[f(0)+f(h)]h + \int_a^b v(x)f''(x)dx \end{aligned}$$

   und die Bedingungen auf v sind:

$$v''(x) = 1, \qquad v'(h) = \tfrac{1}{2}h = -v'(0) \qquad v(h) = 0 = v(0).$$

   Durch Integration ist $v(x) = x^2/2 + ax + b$. Wegen der Bedingungen $v(h) = 0 = v(0)$ hat $v(x)$ die Form $v(x) = cx(x-h)$ und daher gelten $b = 0$, $a = -h/2$ und $v(x) = x(x-h)/2$. Glücklicherweise gelten $v'(h) = h/2 = -v'(0)$.

   Für die Simpsonschen Regel:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{+h} f(x)dx &= \int_{-h}^0 v_1^{(4)}(x)f(x)dx + \int_0^{+h} v_2^{(4)}(x)f(x)dx \\ &= \frac{1}{3}[f(-h)+4f(0)+f(h)] + \int_{-h}^0 v_1(x)f^{(4)}(x)dx + \int_0^{+h} v_2(x)f^{(4)}(x)dx \end{aligned}$$

   mit $v_1(x) = (x+h)^3(3x-h)/72$ und $v_2(x) = (x-h)^3(3x+h)/72$.

10. *Verstehe ich Konvergenz und absolut Konvergenz für Integrale und Reihen, und kenne ich Verfahren mit denen ich beides zeigen kann?*

    Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{x}dx &= \ldots u = 1/x \ldots = \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u}du = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du + \int_\pi^\infty \frac{\sin(u)}{u}du \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du + \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(u)}{u}du \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[(-1)^k \sin(u)\right] \frac{du}{u}
\end{aligned}$$

    Auf dem Intervall $[0,\pi]$ gilt $|\sin(u)/u| \leq 1$ und daher gilt:

$$\left|\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| du \leq \pi.$$

    Auf dem Intervall $[k\pi,(k+1)\pi]$ ist $[(-1)^k \sin(u)]$ nicht negative. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_k \in [k\pi,(k+1)\pi]$ so daß:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[(-1)^k \sin(u)\right] \frac{du}{u} = \frac{1}{\xi_k} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[(-1)^k \sin(u)\right] du$$

    oder:

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[(-1)^k \sin(u)\right] \frac{du}{u} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\xi_k} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[(-1)^k \sin(u)\right] du.$$

    Wegen der Periodizität des Integrands gilt:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[(-1)^k \sin(u)\right] du = \int_0^\pi \sin(u)du = 2$$

    und daher:

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[(-1)^k \sin(u)\right] \frac{du}{u} = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\xi_k}.$$

    Wegen der Ungleichung $k\pi \leq \xi_k \leq (k+1)\pi \leq \xi_{k+1} \leq (k+2)\pi$ ist $\{1/\xi_k\}$ eine fallende Nullfolge mit nichtnegativen Gliedern. Nach dem Leibnizschen Kriterium für alternierende Reihen konvergiert die letzte Summe. Deshalb konvergiert das obige Integral. Auf der anderen Seite konvergiert das Integral nicht absolut:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|\frac{\sin(1/x)}{x}\right| dx &= \int_{\frac{1}{\pi}}^\infty \left|\frac{\sin(1/x)}{x}\right| dx + \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{1}{(k+1)\pi}}^{\frac{1}{k\pi}} \left|\frac{\sin(1/x)}{x}\right| dx = \ldots u = 1/x \ldots \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du + \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[(-1)^k \sin(u)\right] \frac{du}{u} \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\xi_k} \quad\geq\quad \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1} \quad=\quad \infty.
\end{aligned}$$

11. *Kenne ich Eigenschaften der Gamma-Funktion und ihre Beziehung mit der Fehlerfunktion?*

Für den Einheitskugelinhalt, $\tau_n = \mathrm{Vol}(K_n(1)) = \tau_{n-1}c_n$, $\ldots c_n = \int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{(n-1)/2}$, $\ldots$ $c_n \cdot c_{n-1} = 2\pi/n \ldots$, $\tau_n = c_n\tau_{n-1} = 2\pi n^{-1}\tau_{n-2}$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt \\
\Gamma(k+1) &= k! \\
\Gamma(k+\tfrac{3}{2}) &= (k+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \cdots = \left[\tfrac{2k+1}{2}\tfrac{2k-1}{2}\cdots\tfrac{1}{2}\right]\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\
\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

oder $\tau_n = \pi^{3/2}/\Gamma(n/2+1)$ (cf. Forster, S. 145). Für die Fehlerfunktion:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{t\to\infty}\mathrm{erf}(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\xi^2}d\xi = \ldots\eta^{\frac{1}{2}} = \xi \ldots \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\eta^{\frac{1}{2}-1}e^{-\eta}d\eta = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

12. *Kann ich die Leibnizsche Regel anwenden?*

    Die Leibnizsche Regel ist:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x,t)dt + f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x)$$

    Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{\cos(x)}^{\ln(x)}\exp(-xt^2)dt &= \int_{\cos(x)}^{\ln(x)}[-t^2\exp(-xt^2)]dt \\
&+ \exp(-x\ln(x))(1/x) - \exp(-x\cos(x))(-\sin(x)).
\end{aligned}$$

13. *Kenne ich Funktionenfolgen die einerseits gleichmäßig oder andererseits nur punktweise konvergieren, und kann ich die Konvergenz zeigen?*

    Die trivialen Funktionen $f_n(x) = 1/n$ konvergieren offensichtlich gleichmäßig gegen $f(x) = 0$. Sie passen schließlich in einem Schlauch mit beliebig kleinem Radius. Die Funktionen $g_n(x) = x^n$ konvergieren nur punktweise auf $[0,1]$ gegen die Funktion $g(x) = 0$, $x \in [0,1)$, $g(1) = 1$. In einem Schlauch mit Radius kleiner als eins passen die g_ns schließlich nicht, d.h. $g_n(x) - g_{n+k}(x) = x^n - x^{n+k} \approx 1$ für $x \approx 1$ und k groß genug.

14. *Habe ich beweisbare Beispiele in denen man die Limiten vertauschen darf und nicht darf:* $L\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \lim_{N\to\infty} Lf_N(x)$, *wobei* $L = \lim_{x\to x_0}$, D_x, *oder* $\int dx$.

    Seien:

V1:	Vertauschbarkeit mit $L = \lim\limits_{x\to x_0}$,	$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x) = \lim\limits_{N\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_N(x)$
V2:	Vertauschbarkeit mit $L = D_x$,	$D_x\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x) = \lim\limits_{N\to\infty} D_x f_N(x)$
V3:	Vertauschbarkeit mit $L = \int dx$,	$\int\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x)dx = \lim\limits_{N\to\infty}\int f_N(x)dx$

    G0: gleichmäßige Konvergenz von $\{f_N\}$
    G1: gleichmäßige Konvergenz von $\{f'_N\}$

    Auf Grund der Sätze:

$$\begin{aligned}
G0 &\Rightarrow V1 \\
G1 &\Rightarrow V2 \\
G0 &\Rightarrow V3
\end{aligned}$$

sind die Limiten mit der obigen Funktionenfolge $f_n(x) = 1/n$ in allen Fällen vertauschbar. Nun suchen wir Beispiele in denen die Limiten nicht vertauschbar sind. Auf Grund der selben Sätze:

$$\begin{array}{lcl} \text{nicht V1} & \Rightarrow & \text{nicht G0} \\ \text{nicht V2} & \Rightarrow & \text{nicht G1} \\ \text{nicht V3} & \Rightarrow & \text{nicht G0} \end{array}$$

müssen die gewünschten Folgen irgendeine gleichmäßige Konvergenz verletzen, aber wir müssen auf die folgenden aufpassen:

$$\begin{array}{lcl} \text{nicht G0} & \not\Rightarrow & \text{nicht V1} \\ \text{nicht G1} & \not\Rightarrow & \text{nicht V2} \\ \text{nicht G0} & \not\Rightarrow & \text{nicht V3.} \end{array}$$

Nicht V1. Die obige nicht gleichmäßig konvergierende Funktionenfolge $g_n(x) = x^n$ passt:

$$L \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0 \neq$$

$$\lim_{n\to\infty} L g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Nicht V2. Die Folge $g_n(x)$ passt hier nicht, weil der Inhalt $\int_0^1 g_n(x)dx$ verschwindet wenn $n \to \infty$. Eine passende Funktionenfolge, die nicht gleichmäßig sondern nur punktweise gegen $h(x) = 0$ konvergiert, ist $h_n(x) = n$, $x \in [0, 1/n]$, $h_n(x) = 0$, sonst:

$$L \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} h_n(x)dx = \int_0^1 h(x)dx = 0 \neq$$

$$\lim_{n\to\infty} L h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Nicht V3. Die obigen Folgen sind nicht ganz passend, weil eine oder eine andere Funktion nicht differenzierbar ist. Hier wird eine passende Funktionenfolge durch $\phi_n(x) = \sin(nx)/n$ definiert. Sie konvergiert gegen $\phi(x) = 0$ gleichmäßig, aber die Folge $\phi_n'(x)$ konvergiert gegen $\phi'(x) = 0$ nicht, d.h. G0 gilt aber nicht G1:

$$L \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = D_x \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = D_x \phi(x) = 0 \neq$$

$$\lim_{n\to\infty} L \phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} D_x \phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cos(nx) \text{ existiert nicht.}$$

15. *Kann ich Fourierreihen berechnen? Verstehe ich was passiert, wenn die Funktion nicht periodisch aussieht? Kann ich die L^2-Norm mit den Fourierkoeffizienten darstellen?*

Die Fourierkoeffizienten der Funktion $h(x) = \mathrm{sgn}(x)$ werden wie folgt bestimmt, weil $h(x)$ ungerade ist:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(x) \cos(nx) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} h(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} \sin(nx) dx = -\frac{2}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^\pi = \begin{cases} 4/(n\pi), & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\|h - f\|_{L^2([-\pi,+\pi])} = 0 \quad \text{mit} \quad f(x) = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{4}{n\pi} \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)}.$$

Obwohl $h(x)$ auf $(-\infty, \infty)$ nicht periodisch aussieht, ist $f(x)$ auf $[-\pi, +\pi]$ periodisch:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\pi, 0) \\ +1 & x \in (0, +\pi) \\ 0 & x = -\pi, 0, +\pi \end{cases}$$

Nach der Parsevalschen Gleichung gilt:

$$\|h\|^2_{L^2([-\pi,+\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 \, dx = \pi \cdot \sum_{n \text{ ungerade}} \left[\frac{4}{n\pi}\right]^2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16/\pi^2}{(2n+1)^2}.$$

16. *Kenne ich Beispiele, in denen der Abstand zwischen einem isolierten Element und einem linearen Unterraum eines Banachraumes einerseits eindeutig und anderseits nicht eindeutig minimiert wird?*

Seien $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 1)$ und $M = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = -x_1\}$. Wenn der Abstand zwischen $\hat{x}$ und M in der p-Norm gemessen wird, ist die nächste Projektion $x^* \in M$ mit $\|\hat{x} - x^*\|_p = \inf_{x \in M} \|\hat{x} - x\|_p$ eindeutig für $p \in (1, \infty]$, d.h. die Funktion

$$f_p(x_1) = |1 - x_1|^p + |1 + x_1|^p = (\hat{x}_1 - x_1)^p + (\hat{x}_1 - x_2)^p = \|\hat{x} - x\|_p^p$$

hat ein eindeutiges Minimum in $x_1^* = 0$ (d.h. $x^* = (0, 0)$) für $p \in (1, \infty]$: $f_p'(0) = 0$, $f_p''(0) = 2p(p-1) > 0$, und $f_\infty(x_1) = \max(1 - x_1, 1 + x_1)$ erfüllt $f_\infty(0) = 1$ und $f_\infty(x_1) > 1$, $x_1 \neq 0$. Auf der anderen Seite gilt $f_1(x_1) = 2$ für alle $x_1 \in [-1, +1]$ und daher wird die Projektion $x^* = \{(x_1^*, x_2^*) : x_2^* = -x_1^* \in [-1, +1]\}$ im Fall $p = 1$ nicht eindeutig bestimmt.

Seien $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 1)$ und $M = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = 0\}$. Wenn der Abstand zwischen $\hat{x}$ und M in der p-Norm gemessen wird, ist die nächste Projektion $x^* \in M$ mit $\|\hat{x} - x^*\|_p = \inf_{x \in M} \|\hat{x} - x\|_p$ eindeutig für $p \in [1, \infty)$, d.h. die Funktion

$$f_p(x_1) = |x_1|^p + 1 = |\hat{x}_1 - x_1|^p + |\hat{x}_1 - x_2|^p = \|\hat{x} - x\|_p^p$$

hat ein eindeutiges Minimum in $x_1^* = 0$ (d.h. $x^* = (0, 0)$) für $p \in [1, \infty)$: $f_p'(0) = 0$, $f_p''(0) = p(p-1) > 0$, und $f_1(x_1) = |x_1| + 1$ erfüllt $f_1(0) = 1$ und $f_1(x_1) > 1$, $x_1 \neq 0$. Auf der anderen Seite gilt $f_\infty(x_1) = 1$ für alle $x_1 \in [-1, +1]$ und daher wird die Projektion $x^* = \{(x_1^*, x_2^*) : x_2^* = 0, x_1^* \in [-1, +1]\}$ im Fall $p = \infty$ nicht eindeutig bestimmt.

17. *Kenne ich Matrizen und Operatoren, deren Normen ich berechnen kann?*

Für eine Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6 \qquad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7.$$

Ein Operator (eine auf einem unendlich dimensionalen Raum definierte Abbildung):

$$Lf = f' \qquad L : (C^1(I), \|\cdot\|_{C^1(I)}) \to (C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)})$$

wobei die Normen so definiert werden:

$$\|f\|_{C^0(I)} = \sup_{x \in I} |f(x)|, \qquad \|f\|_{C^1(I)} = \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x)|.$$

Der Operator ist linear: $L(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha Lf + \beta Lg$. Die Norm von $L \in \mathcal{L}(C^1, C^0)$ ist:

$$\|L\|_{\mathcal{L}(C^1, C^0)} = \sup_{f \in C^1} \frac{\|Lf\|_{C^0}}{\|f\|_{C^1}} = \sup_{f \in C^1} \frac{\sup_{x \in I} |f'(x)|}{\sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x)|}.$$

Der letzte Quotient Q hat die Form $Q = a/(b+a)$ und daher ist er immer kleiner als eins:

$$\|L\|_{\mathcal{L}(C^1,C^0)} \leq \sup_{a,b\geq 0} \frac{a}{b+a} \leq 1.$$

Die obige Folge $\phi_n(x) = \sin(nx)/n$ gibt Quotienten Q_n die gegen eins konvergieren:

$$\|L\|_{\mathcal{L}(C^1,C^0)} \geq \sup_n \frac{\sup_{x\in I}|\phi'(x)|}{\sup_{x\in I}|\phi(x)| + \sup_{x\in I}|\phi'(x)|} = \sup_n \frac{1}{1/n+1} = 1 \geq \|L\|_{\mathcal{L}(C^1,C^0)}$$

und daher gilt $\|L\|_{\mathcal{L}(C^1,C^0)} = 1$.

18. *Kenne ich Beispiele, in denen die Richtungsableitungen, die partiellen Ableitungen und die Fréchetsche Ableitung existieren und existieren nicht?*

Die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ hat partielle Ableitungen $f_x = 2x$ $f_y = 2y$, die stetig sind, und daher ist f differenzierbar. Deshalb hat die Richtungsableitung $D_v f(x,y)$ in der Richtung $v = (h,k)$ die Darstellung $D_v f(x,y) = df(x,y)(h,k)$, und die Fréchetsche Ableitung hat die Darstellung, $df(x,y)(h,k) = \nabla f(x,y)\cdot(h,k) = f_x h + f_y k = 2xh + 2yk$.

Die Funktion $f(x,y) = x^2y/(x^2+y^2)$, $f(0,0) = 0$, hat in $(x,y) = (0,0)$ alle Richtungsableitungen,

$$D_{(h,k)}f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3}\frac{h^2k}{h^2+k^2} = \frac{h^2k}{h^2+k^2} = f(h,k),$$

aber ist in $(x,y) = (0,0)$ nicht differenzierbar, weil die Darstellung $f(h,k) = D_{(h,k)}f(0,0) = df(0,0)(h,k)$ eine nicht lineare Abbildung für die notwendigerweise lineare Fréchetsche Ableitung impliziert.

Die Funktion $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$, hat partielle Ableitungen in $(x,y) = (0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

aber keine Richtungsableitungen:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}, \quad \text{existiert nicht, } k \neq 0 \neq h.$$

Da die Richtungsableitungen nicht existieren, ist die Funktion nicht differenzierbar.

Die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ hat in $(x,y) = (0,0)$ keine Richtungsableitungen,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\sqrt{h^2+k^2} = \sqrt{h^2+k^2}\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}, \qquad \text{existiert nicht}$$

und daher ist nicht differenzierbar.

19. *Kenne ich Beispiele, in denen die Anordnung gemischter partiellen Ableitungen vertauscht werden kann und nicht werden kann?*

Die Funktion $f(x,y) = xy$ hat die partiellen Ableitungen, $\partial_1 f = y$, $\partial_2 f = x$, und $\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f = 1$. Die Funktion $f(x,y) = xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$, $f(0,0) = 0$, hat die partiellen Ableitungen:

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \partial_1 f(0,0) = 0,$$

und:

$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\partial_1 f(0,t) - \partial_1 f(0,0)}{t} = -1.$$

Da $f(y,x) = -f(x,y)$ gilt, folgt:

$$\partial_2 f(y,x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(y,x+h) - f(y,x)}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{t} = -\partial_1 f(x,y).$$

Also gilt $\partial_1\partial_2 f(y,x) = -\partial_2\partial_1 f(x,y)$. Wegen $\partial_2\partial_1 f(0,0) \neq 0$ ergibt sich somit das Ergebnis $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq -\partial_2\partial_1 f(0,0)$.

20. *Kenne ich Faltungsoperatoren $L_\varepsilon^m : C^0 \to C^m$, $m = 1,2$ und $m = \infty$, und kann ich zeigen, daß $L_\varepsilon^m f \to f$ punktweise konvergiert, wenn $\varepsilon \to 0$?*

Definiere:

$$[L_\varepsilon^{(m)} f](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_\varepsilon^{(m)}(x-y) f(y) dy$$

wobei die Kernen so definiert werden:

$$k_\varepsilon^{(1)}(t) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & |t| \le \varepsilon \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$k_\varepsilon^{(2)}(t) = \begin{cases} (t+\varepsilon)/\varepsilon, & t \in [-\varepsilon, 0] \\ (\varepsilon - t)/\varepsilon, & t \in [0, +\varepsilon] \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$k_\varepsilon^{(3)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_\varepsilon} \exp\left[\dfrac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right], & |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad c_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left[\frac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right] dx.$$

Dann gelten $L_\varepsilon^{(m)} : C^0 \to C^m$, $m = 1,2$ und $m = \infty$, und die punktweise Konvergenz, $L_\varepsilon^{(m)} f \to f$, wenn $\varepsilon \to 0$. Zum Beispiel,

$$[L_\varepsilon^{(1)} f](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_\varepsilon^{(1)}(x-y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} k_\varepsilon^{(1)}(s) f(x-s) ds = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-s) ds$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\sigma \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ so daß:

$$[L_\varepsilon^{(1)} f](x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-s) ds = \frac{f(x-\sigma)}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} ds = f(x-\sigma) \to f(x), \qquad \varepsilon \to 0.$$

$[L_\varepsilon^{(1)} f](x)$ ist auch stetig differenzierbar wenn f stetig ist:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{[L_\varepsilon^{(1)} f](x+h) - [L_\varepsilon^{(1)} f](x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} [f(x+h-s) - f(x-s)] ds \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h\varepsilon} \left\{ \int_{-\varepsilon-h}^{+\varepsilon-h} f(x-t) dt - \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-s) ds \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h\varepsilon} \left\{ \int_{-\varepsilon-h}^{-\varepsilon} f(x-s) ds - \int_{+\varepsilon-h}^{+\varepsilon} f(x-s) ds \right\} \\
\tau \in [-\varepsilon - h, -\varepsilon], \quad & \\
\sigma \in [\varepsilon - h, \varepsilon], \quad &= \lim_{h\to 0} \frac{hf(x-\tau) - hf(x-\sigma)}{2h\varepsilon} \\
\tau \to -\varepsilon, \quad & \\
\sigma \to \varepsilon, \quad &= \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

21. *Kenne ich Beispiele, in denen ich Flächendarstellungen, Niveaukurven, Gradient-Vektorfelder und Kurven des steilsten Anstiegs ohne einen Computer grafisch darstellen kann?*

Die Funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ hat ein Paraboloid als eine Flächendarstellung. Die Niveaukurven $\Gamma_c = \{(x,y) : f(x,y) = x^2+y^2 = c\}$, $c \geq 0$, sind Kreise, die um den Ursprung zentriert werden. Der Gradient ist $\nabla f(x,y) = \langle 2x, 2y\rangle$ mit dem Betrag $|\nabla f| = 2\sqrt{x^2+y^2}$. Das heisst, das Gradient-Vektorfeld besteht aus Vektoren, die immer weg vom Ursprung zeigen, und je ferner sie vom Ursprung sind, desto grösser im Betrag sind sie. Die Kurven des steilsten Anstiegs sind radiale Strahlen aus dem Ursprung, und sie sind entsprechend den Gradient-Vektoren ausgerichtet.

22. *Kenne ich Beispiele mit glatten und nicht glatten, mit extremen und nicht extremen kritischen Punkten, die ich (a) mit der Definitheit der Hesseschen Matrix, (b) mit einer Taylor-Entwicklung (wenn nicht (a)), und (c) mit direkten Funtionenwerten (wenn nicht (a) und nicht (b)) analysieren kann?*

Das Paraboloid $f(x,y) = x^2+y^2$ und der Sattel $g(x,y) = xy$ haben die Gradienten $\nabla f(x,y) = \langle 2x, 2y\rangle$ und $\nabla g(x,y) = \langle y, x\rangle$, und daher ist $(x,y) = (0,0)$ ein kritischer Punkt für die beiden glatten Funktionen. Sie haben die Hesseschen Matrizen,

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D^2 g(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $D^2 f$ sind $\{2,2\}$. Daher ist $D^2 f$ positiv definit, und der kritische Punkt in $(0,0)$ ist ein Minimum. Die Eigenwerte von $D^2 g$ sind $\{-1,+1\}$. Daher ist $D^2 g$ indefinit, und der kritische Punkt in $(0,0)$ ist kein Extremum.

Die im Ursprung sehr flache Funktion $h(x,y) = x^4+y^4$ hat den Gradient $\nabla h(x,y) = \langle 4x^3, 4y^3\rangle$, und daher ist $(x,y) = (0,0)$ ein kritischer Punkt. Sie hat die Hessesche Matrix,

$$D^2 h(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $D^2 h$ im kritischen Punkt sind $\{0,0\}$, und aus der Indefinitheit kann noch nichts über den kritischen Punkt beschlossen werden. Aus einer Taylor-Entwicklung,

$$\begin{aligned} \exists t \in (0,1), \qquad h(x,y) - h(0,0) &= \nabla h(0,0) \cdot \langle x,y\rangle + \tfrac{1}{2}\langle x,y\rangle \cdot D^2 h(tx,ty) \cdot \langle x,y\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle x,y\rangle \cdot D^2 h(tx,ty) \cdot \langle x,y\rangle \\ &= 6(x^4+y^4)t^2 > 0, \qquad\qquad x \neq 0 \neq y \end{aligned}$$

kann es beschlossen werden, daß h ein Minimum in $(0,0)$ hat, d.h. $h(x,y) > h(0,0)$ für alle (x,y), $x \neq 0 \neq y$.

Der Funktion $s(x,y) = (x^2+y^2)^{1/3}$ hat den im Ursprung nicht glatten Gradient,

$$\nabla s(x,y) = \frac{2\langle x,y\rangle}{3(x^2+y^2)^{2/3}} \qquad \nabla s(th,tk) = \frac{1}{t^{1/3}}\frac{2\langle h,k\rangle}{3(h^2+k^2)^{2/3}}$$

und sie hat tatsächlich einen Spitz im Ursprung. Da der Gradient im Ursprung nicht existiert, ist der Ursprung ein kritischer Punkt, aber er kann mit den obigen Sätzen nicht analysiert werden. Trotzdem ist es klar aus direkten Funtionswerten, $s(x,y) > 0$, $x \neq 0 \neq y$, $s(0,0) = 0$, daß die Funktion ein Minimum im kritischen Punkt hat.

23. *Verstehe ich die Bedeutung der Cauchy-Riemannschen Gleichungen?*

Die Funktion $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ ist genau dann in $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar, wenn $F = (u, v) : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ in (x_0, y_0) total differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Gleichungen, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, in (x_0, y_0) erfüllt sind. In diesem Fall gilt $f'(z_z) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$. Insbesondere geben die konstanten Funktionen alle differenzierbaren Funktionen $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ mit $f(\boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{R}$: $v = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u =$ Konstante.

24. *Kenne ich einen linearen und einen nicht linearen Operator, dessen Richtungsableitungen und Fréchetsche Ableitung ich berechnen kann?*

Linear. Der lineare Operator $Lf = f' : C^1 \to C^0$ wurde früher analysiert. Es wurde gezeigt, daß er ein linearer Operator von $(C^1, \|\cdot\|_{C^1})$ in $(C^0, \|\cdot\|_{C_0})$ ist, wobei die Normen die entsprechenden Sup-Normen sind. Die Richtungsableitungen sind:

$$D_h L(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(f + \varepsilon h) - Lf}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(f' + \varepsilon h') - f'}{\varepsilon} = h'.$$

Daraus ist es zu vermuten, daß die Fréchetsche Ableitung durch $\partial L(f)h = h' = D_h L(f)$ definiert wird. Mit der Definition der Fréchetschen Ableitung wird die Vermutung bestätigt:

$$\lim_{\|h\|_{C^1} \to 0} \frac{|L(f + h) - L(f) - \partial L(f)h|}{\|h\|_{C^1}} = \lim_{\|h\|_{C^1} \to 0} \frac{|(f' + h') - f' - h'|}{\|h\|_{C^1}} = 0.$$

Nicht linear. Sei $v \in L^2([-1, 1])$ eine verrauschte Funktion. Sei u eine entrauschte Abschätzung von v mit $u \in L^2([-1, 1])$ und $u' \in L^2([-1, 1])$, die durch die Minimierung von

$$J(u) = \int_{-1}^{+1} [u(x) - v(x)]^2 dx + \mu \int_{-1}^{+1} [u'(x)]^2 dx$$

bestimmt wird. Das Funktional J ist nicht linear, weil $J(2v) = \|v\|_{L^2}^2 + 4\mu\|v'\|_{L^2}^2 \neq 2\mu\|v'\|_{L^2}^2 = 2J(v)$ gilt. Nenne den Hilbertraum H^1, in dem u sich befindet. Nach der Definition der Richtungsableitung, berechnet man für beliebiges $w \in H^1$:

$$D_w J(u) = \lim_{t \to 0} \frac{J(u + tw) - J(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdots$$

$$\left\{ \int_{-1}^{+1} [u(x) + tw(x) - v(x)]^2 + \mu[u'(x) + tw'(x)]^2 dx - \int_{-1}^{+1} [u(x) - v(x)]^2 + \mu[u'(x)]^2 dx \right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_{-1}^{+1} [tw(x)][2u(x) + tw(x) - 2v(x)] + \mu[tw'(x)][2u'(x) + tw'(x)] dx \right\} =$$

$$\lim_{t \to 0} \left\{ 2 \int_{-1}^{+1} w(x)[u(x) - v(x)] + \mu w'(x)u'(x) dx + t \int_{-1}^{+1} [w(x)]^2 dx + t\mu \int_{-1}^{+1} [w'(x)]^2 dx \right\}$$

$$= 2 \int_{-1}^{+1} \{w(x)[u(x) - v(x)] + \mu w'(x)u'(x)\} dx.$$

Nun ist es zu vermuten, daß die Fréchetsche Ableitung so definiert wird:

$$\partial J(u)w = 2 \int_{-1}^{+1} \{w(x)[u(x) - v(x)] + \mu w'(x)u'(x)\} dx.$$

Diese Abbildung ist linear, da die folgende Gleichung gilt:

$$\partial J(u)(a_1 w_1 + a_2 w_2) =$$

$$2\int_{-1}^{+1}\{[a_1w_1(x)+a_2w_2(x)][u(x)-v(x)]+\mu[a_1w_1'(x)+a_2w_2'(x)]u'(x)\}dx$$

$$=2a_1\int_{-1}^{+1}\{w_1(x)[u(x)-v(x)]+\mu w_1'(x)u'(x)\}dx$$

$$+2a_2\int_{-1}^{+1}\{w_2(x)[u(x)-v(x)]+\mu w_2'(x)u'(x)\}dx$$

$$=a_1\partial J(u)w_1+a_2\partial J(u)w_2.$$

Mit der Definition der Fréchetschen Ableitung findet man:

$$\lim_{\|w\|\to 0}\frac{|J(u+w)-J(u)-\partial J(u)w|}{\|w\|}=$$

$$\lim_{\|w\|\to 0}\frac{1}{\|w\|}\left\{\int_{-1}^{+1}\Big[[u(x)+w(x)-v(x)]^2-[u(x)-v(x)]^2-2w(x)[u(x)-v(x)]\Big]\,dx\right.$$

$$\left.+\,\mu\int_{-1}^{+1}\Big[[u'(x)+w'(x)]^2-[u'(x)]^2-2w'(x)u'(x)\Big]\,dx\right\}$$

$$=\lim_{\|w\|\to 0}\frac{1}{\|w\|}\int_{-1}^{+1}\Big[[w(x)]^2+\mu[w'(x)]^2\Big]\,dx\le\max\{1,\mu\}\lim_{\|w\|\to 0}\|w\|=0$$

wobei die H^1-Norm natürlich wie folgt definiert wird:

$$\|u\|^2=\|u\|_{H^1}^2=\int_{-1}^{+1}\Big[[u(x)]^2+[u'(x)]^2\Big]\,dx.$$

25. *Kann ich die erste, die zweite und höhere Ableitungen einer linearen Abbildung berechnen?*

    Sei $L\in\mathcal{L}(F,G)$. In einfachen Wörten ist L die erste Ableitung von $g(f)=Lf$ nach f, und die zweite Ableitung von $g(f)=Lf$ nach f ist 0. Mit der Definition der Fréchetschen Ableitung werden die Vermutungen bestätigt:

$$\lim_{\|h\|_A\to 0}\frac{\|L(f+h)-L(f)-\partial L(f)h\|_B}{\|h\|_A}=\lim_{\|h\|_A\to 0}\frac{\|(Lf+Lh)-Lf-Lh\|_B}{\|h\|_A}=0$$

$$\lim_{\|h\|_A\to 0}\frac{\|\partial L(f+h)-\partial L(f)-\partial^2L(h)h\|_{\mathcal{L}(A,B)}}{\|h\|_A}=\lim_{\|h\|_A\to 0}\frac{\|L-L-0\|_{\mathcal{L}(A,B)}}{\|h\|_A}=0.$$

26. *Kenne ich drei partielle Differentialgleichungen, die (*die?*) drei grundsätzlichen physikalischen Phänomene modellieren, und kann ich entsprechende Lösungen grafisch darstellen?*

    Felder. Die Flächendarstellung von $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ ist trichterförmig mit einem unendlich tiefen (*schwarzen*) Loch im Ursprung. Die Funktion f ist eine Lösung der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta f=\sum_{n=1}^{N}\partial_n^2 f\overset{N=2}{=}f_{xx}+f_{yy}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

in $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 : x\neq 0\neq y\}$.

Diffusion. Die Flächendarstellung von $g(x,t)=\exp[-x^2/(4t)]/\sqrt{t}$ hat einen Spitz in $t=0$, der nach und nach mit der Zeit t geglättet wird, bis er verschwindet. Die Funktion g ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$[\partial_t-\Delta]g\overset{N=1}{=}\partial_t g-g_{xx}=\exp[-x^2/(4t)]\frac{x^2-2t}{4t^{5/2}}-\exp[-x^2/(4t)]\frac{x^2-2t}{4t^{5/2}}=0$$

in $\{(x,t) \in \boldsymbol{R}^2 : t > 0\}$.

Wellen. Die Flächendarstellung von $h(x,t) = \sin(x-2t)$ ist eine Sinus-Welle in $t=0$, die mit der Zeit t nach rechts (positives x) verschoben wird. Die Funktion h ist eine Lösung der Wellengleichung

$$[\partial_t^2 - \Delta]h \overset{N=1}{=} h_{tt} - h_{xx} = -4\sin(x-2t) + 4\sin(x-2t) = 0$$

in $\{(x,t) \in \boldsymbol{R}^2\}$.

27. *Kann ich die Produkt-Regel und die Ketten-Regel anwenden, um Ableitungen höher dimensionaler (Produkte und Kompositionen von) Abbildungen zu berechnen?*

 Eine Transformation $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ heist *starr* wenn $[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}] = I$ gilt, z.B. betrachte

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = R(c)\boldsymbol{x}, \qquad R(c) = \begin{bmatrix} \cos(c) & \sin(c) \\ -\sin(c) & \cos(c) \end{bmatrix}, \qquad [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}]^T[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}] = R^{\mathrm{T}}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

 Nimm an, daß $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z) : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ eine von einem Parameter z abhängige Transformation ist, z.B. betrachte $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z) = R(z)\boldsymbol{x}$. Mit einer Transformation $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ nimm an, daß $\partial_z\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z))$ gilt, und daß $\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}$ schiefsymmetrisch ist, d.h. $[\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}] = -[\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}]^{\mathrm{T}}$. Nun berechnen wir:

$$\begin{aligned}
&\partial_z\{[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)]\} \\
&\hfill \text{Produkt-Regel} \\
&= [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}_z(\boldsymbol{x},z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)] + [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}_z(\boldsymbol{x},z)] \\
&\hfill \partial_z\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)) \\
&= [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z))]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)] + [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z))] \\
&\hfill \text{Ketten-Regel} \\
&= [\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F})\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)] + [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F})\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)] \\
&\hfill [AB]^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \\
&= \partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)^{\mathrm{T}}\{[\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F})]^{\mathrm{T}} + [\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F})]\}\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z) = 0
\end{aligned}$$

 und dadurch zeigen, daß $\boldsymbol{F}$ für jedes z starr ist, wenn $\boldsymbol{F}$ für ein z_0 starr ist:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{z_0}^{z} [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)]dt \\
&= [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)] - \{[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z_0)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z_0)]\} \\
&= [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},z)] - I.
\end{aligned}$$

28. *Kann ich die Taylor-Entwicklung mit Restglied einer höher dimensionalen Abbildung bestimmen?*

 Wir bestimmen die Taylor-Entwicklung von $f(x,y) = (x-y)/(x+y)$ im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung. Die partiellen Ableitungen sind:

$$f = \left.\frac{x-y}{x+y}\right|_{x=1}^{y=1} = 0, \qquad f_x = \left.\frac{2y}{(x+y)^2}\right|_{x=1}^{y=1} = \frac{1}{2}, \qquad f_y = -\left.\frac{2x}{(x+y)^2}\right|_{x=1}^{y=1} = -\frac{1}{2}$$

$$f_{xx} = -\frac{4y}{(x+y)^3}, \qquad f_{xy} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}, \qquad f_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

und die Taylor-Entwicklung ist:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot\langle x-1, y-1\rangle + \\
\exists t\in(0,1): \quad & \quad \tfrac{1}{2}\langle x-1,y-1\rangle \cdot D^2 f(1+t(x-1), 1+t(y-1))\cdot\langle x-1,y-1\rangle \\
&= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + \\
& \quad f_{xx}(1+t(x-1),1+t(y-1))(x-1)^2/2 + \\
& \quad f_{xy}(1+t(x-1),1+t(y-1))(x-1)(y-1) + \\
& \quad f_{yy}(1+t(x-1),1+t(y-1))(y-1)^2/2 \\
&= (x-y)/2 + \\
& \quad \frac{-2[1+t(y-1)]}{[2+t(x+y-2)]^3}(x-1)^2 + \frac{2[1+t(x-1)]}{[2+t(x+y-2)]^3}(y-1)^2 + \\
& \quad \frac{2t(x-y)]}{[2+t(x+y-2)]^3}(x-1)(y-1)
\end{aligned}$$

die in der Gerade $y=-x$ nicht gilt, wegen der Nenner $(x+y)^k$ in f und ihren partiellen Ableitungen.

29. *Für gegebene $y=f(x)$ und $F(x,u)=0$, kann ich $f^{-1}(y)$, $\partial_y f^{-1}(y)$, $u(x)$ und $\partial_x u(x)$ berechnen? Insbesondere kenne ich ein Beispiel, in dem $f_1^{-1}\neq f_2^{-1}$ gilt und $f_1^{-1}\circ f = I$ und $f_2^{-1}\circ f = I$ auf unterschiedlichen Teilmengen gelten?*

Die Funktion $f:(x,y)\to(u,v)$, $u=x^2$, $v=y$, hat den Bildbereich

$$R=\{(u,v): u\geq 0, v\in(-\infty,\infty)\}$$

da $u=x^2\geq 0$ gilt. Die inverse Funktion $f_1^{-1}:(u,v)\to(x,y)$, $x=\sqrt{u}$, $y=v$, hat den Bildbereich

$$D_1=\{(x,y): x\geq 0, y\in(-\infty,\infty)\}$$

da $x=\sqrt{u}\geq 0$ gilt. Die inverse Funktion $f_2^{-1}:(u,v)\to(x,y)$, $x=-\sqrt{u}$, $y=v$, hat den Bildbereich

$$D_2=\{(x,y): x\leq 0, y\in(-\infty,\infty)\}$$

da $x=-\sqrt{u}\leq 0$ gilt. Jede inverse Funktion dreht das Ergebnis von der ursprünglichen Funktion herum:

$$f_1^{-1}(f(x,y)) = f_1^{-1}(x^2,y) = (|x|,y) = (x,y), \qquad (x,y)\in D_1$$

und

$$f_2^{-1}(f(x,y)) = f_1^{-1}(x^2,y) = (-|x|,y) = (x,y), \qquad (x,y)\in D_2.$$

Aus der Formel $f^{-1}(f(x))=x$ ist es leicht mit der Ketten-Regel herzuleiten, daß die Gleichung,

$$\partial f^{-1}(f(x))\partial f(x) = I \quad \text{oder} \quad \partial f^{-1}(f(x)) = [\partial f(x)]^{-1}$$

gilt. Insbesondere für die obigen Funktionen gelten:

$$\partial f_i^{-1}(x^2,y) = \partial f_i^{-1}(f(x)) = [\partial f(x)]^{-1} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/(2x) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun seien $A,B\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ und $F(x,u)=Ax+Bu$, $x,u\in\boldsymbol{R}^n$. Aus der Formel $F(x,u)=0$ ist es leicht mit der Ketten-Regel herzuleiten, daß die Gleichung,

$$0 = F_x + F_u u_x \quad \text{oder} \quad u_x = -F_u^{-1}F_x$$

gilt. Insbesondere für die Funktion $F(x,u) = Ax + Bu$ gilt:

$$F_x = A, \quad F_u = B, \quad \text{und} \quad u_x = -B^{-1}A.$$

Tatsächlich kann $u(x)$ aus der Gleichung $F(x,u) = 0$ direkt hergeleitet werden:

$$0 = F(x,u) = Ax + Bu \quad \Rightarrow \quad u(x) = -B^{-1}Ax$$

und das selbe Ergebnis für u_x kann direkt gefunden werden:

$$u_x = -D_x B^{-1}Ax = -B^{-1}A.$$

30. *Habe ich ein Beispiel einer Bahnkurve, die ich parametrisieren kann und deren Bogenlänge ich bestimmen kann?*

    Ein Kreis kann durch $k(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, $x(t) = R\cos(t)$, $y(t) = R\sin(t)$ parametrisiert werden. Die Bogenlänge für $t \in [t_1, t_2]$ ist:

$$L[k] = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{k}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} R[\sin^2(t) + \cos^2(t)]^{1/2} dt = R(t_2 - t_1).$$

31. *Habe ich ein Beispiel eines Funktionals (z.B. Bogenlänge in $\boldsymbol{R}^2$) den ich minimieren kann?*

    Wir suchen die Kurve $y \in C^2([0,T], \boldsymbol{R})$ mit minimaler Länge unter Randbedingungen $y(0) = a$, $y(T) = b$, die das folgende nicht lineare Bogenlänge-Funktional minimiert:

$$J(y) = \int_0^T \sqrt{1 + [y'(t)]^2} dt, \qquad y(0) = a, \quad y(T) = b.$$

Das Funktional J is nicht linear, weil $J(y_1 + y_2) = J(y_1) + J(y_2)$ nicht gilt, wenn $-y_1' = y_2' \neq 0$ gilt. In dem gewünchten y verschwinden die Richtungsableitungen von J für alle zulässigen Störungen u:

$$\frac{\delta J}{\delta y}(y;u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y + \varepsilon u) - J(y)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \frac{\sqrt{1 + [y'(t) + \varepsilon u'(t)]^2} - \sqrt{1 + [y'(t)]^2}}{\varepsilon} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{(1 + [y'(t) + \varepsilon u'(t)]^2) - (1 + [y'(t)]^2)}{\sqrt{1 + [y'(t) + \varepsilon u'(t)]^2} + \sqrt{1 + [y'(t)]^2}} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \frac{2y'(t)u'(t) + \varepsilon u'(t)^2}{\sqrt{1 + [y'(t) + \varepsilon u'(t)]^2} + \sqrt{1 + [y'(t)]^2}} dt$$

$$= \int_0^T \frac{y'(t)u'(t)}{\sqrt{1 + [y'(t)]^2}} dt = \frac{y'(t)}{\sqrt{1 + [y'(t)]^2}} u(t) \Bigg|_0^T - \int_0^T u(t) \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1 + [y'(t)]^2}} \right)' dt.$$

Wegen der Randbedingungen $y(0) = a$, $y(T) = b$, muss die Störung u am Rand verschwinden, d.h. $u(0) = 0$ und $u(T) = 0$ gelten und daher gilt:

$$\frac{\delta J}{\delta y}(y;u) = -\int_0^T u(t) \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1 + [y'(t)]^2}} \right)' dt.$$

Da $y + \varepsilon u \in C^2([0,T], \boldsymbol{R}^n)$, $\forall \varepsilon$ gilt, darf $u \in C^2([0,T], \boldsymbol{R}^n)$ eine glatte Störung mit beliebig kleinem Träger sein. Nimm an, daß der Träger von u gegen 0 geht und daß der Betrag von u gegen ∞ geht. Dann wird das obige Integral in einem Punkt konzentriert. Um die Richtungsableitungen für alle zulässigen Störungen zu verschwinden, muss die folgende Gleichung gelten:

$$\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1 + [y'(t)]^2}} \right)' = 0, \qquad 0 < t < T, \qquad y(0) = a, \quad y(T) = b.$$

Daher gilt mit $k_1, k_2, k_3 \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}} = k_1 \quad\Rightarrow\quad [y'(t)]^2 = \frac{k_1}{1-k_1} \quad\Rightarrow\quad y'(t) = k_2 \quad\Rightarrow\quad y(t) = k_2 t + k_3.$$

Mit den Randbedingungen gilt $y(t) = a + (b-a)t/T$, d.h. $\Gamma = \mathrm{graph}(y)$ ist ein Liniensegment. Daß das Funktional J minimiert wird, zeigt man wie folgt:

$$\frac{\delta^2 J}{\delta y^2}(y; u, v) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\delta J}{\delta y}(y+\varepsilon v; u) - \frac{\delta J}{\delta y}(y; u)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \left\{\frac{[y'(t)+\varepsilon v'(t)]u'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}} - \frac{y'(t)u'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}}\right\} dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdots$$

$$\int_0^T \left\{\frac{y'(t)u'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}} \frac{(1+[y'(t)]^2) - (1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}^2 + \sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}} + \right.$$

$$\left.\frac{\varepsilon u'(t)v'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}}\right\} dt = \int_0^T \left\{\frac{\varepsilon u'(t)v'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}} - \frac{[y'(t)]^2 u'(t)v'(t)}{[1+[y'(t)]^2]^{3/2}}\right\} dt$$

$$= \int_0^T \frac{v'(t)u'(t)}{[1+[y'(t)]^2]^{3/2}} dt$$

so daß mit $y(t) = a + (b-a)t/T$ folgt:

$$\frac{\delta^2 J}{\delta y^2}(y; u, u) = \int_0^T \frac{[u'(t)]^2}{[1+[(b-a)/T]^2]^{3/2}} dt > 0, \qquad u \neq 0, \qquad (u(0) = u(T) = 0 \Rightarrow u' \neq 0)$$

und daher ist die zweite Ableitung von J in y positiv definit. Da $\|u\|_{H_0^1} = [\int_0^T [u'(t)]^2 dt]^{1/2}$ eine Norm auf dem Raum $u \in H_0^1 = \{u : u(0) = u(T) = 0, u \in L^2, u' \in L^2\}$ ist, ist die zweite Ableitung tatsächlich *koerziv* auf H_0^1,

$$\exists c > 0, \qquad \text{s.d.} \qquad \frac{\delta^2 J}{\delta y^2}(y; u, u) \geq c\|u\|_{H_0^1}^2, \qquad \forall u \in H_0^1.$$

Eine solche Bedingung ist hinreichend zu zeigen, daß J in y minimiert wird. Bemerke, daß positiv Definitheit und Koerzivität in endlich dimensionalen Räumen äquivalent sind.

32. *Habe ich ein Beispiel einer Bahnkurve, deren Bogenlänge-Parametrisierung ich berechnen kann?*

Die Bogenlänge der Schraubenlinie $\gamma(t) = \langle R\cos(t), R\sin(t), ht\rangle$ von $t = 0$ ist:

$$s(t) = \int_0^t |\dot\gamma| d\tau = \int_0^t \{R^2[\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)] + h^2\}^{1/2} d\tau = t\sqrt{R^2+h^2}.$$

Daher ist die Bogenlänge-Parametrisierung,

$$\begin{aligned}\delta(s) &= \gamma(t(s)) = \gamma\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) \\ &= \left\langle R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), h\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right\rangle.\end{aligned}$$

33. *Kann ich die Krümmung und die Torsion einer bestimmten Bahnkurve berechnen?*

Für die Bogenlänge-Parametrisierung $\delta(s)$ gelten $\kappa = |\delta''(s)|$ und $\tau = |(\delta' \times \delta'') \cdot \delta'''|/\kappa^2$. Für die obige Bogenlänge-Parametrisierung der Schraubenlinie folgen:

$$\delta'(s) = \left\langle -\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \right\rangle.$$

$$\delta''(s) = -\frac{R}{R^2+h^2} \left\langle \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), 0 \right\rangle.$$

$$\delta'''(s) = \frac{R}{[R^2+h^2]^{\frac{3}{2}}} \left\langle \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), 0 \right\rangle.$$

$$\delta' \times \delta'' = \frac{R}{[R^2+h^2]^{\frac{3}{2}}} \left\langle h\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), -h\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), r \right\rangle$$

und schließlich:

$$\kappa = |\delta''(s)| = \frac{R}{R^2+h^2}, \qquad \tau = |(\delta' \times \delta'') \cdot \delta'''|/\kappa^2 = \frac{h}{R^2+h^2}.$$

Das Ergebnis ist intuitiv klar, weil jeder Punkt in der Schraubenlinie bezüglich der Krummung und der Torsion genau wie jeder andere Punkt ist.

34. *Kann ich den Tangenteneinheitsvektor einer bestimmten Bahnkurve und den Normaleneinheitsvektor einer bestimmten Fläche bestimmen?*

    Für den Kreis $k(t) = \langle R\cos(t), R\sin(t)\rangle$ ist ein Tangenteneinheitsvektor durch $\hat{\mathrm{t}} = \dot{k}/|\dot{k}| = \langle -\sin(t), \cos(t)\rangle$ gegeben. Mit der Bogenlänge-Parametrisierung wird ein Tangenteneinheitsvektor für die Schraubenlinie

    $$\delta(s) = \left\langle R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), h\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}} \right\rangle$$

    durch

    $$\hat{\mathrm{t}} = \delta'(s) = \left\langle -\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \right\rangle.$$

    gegeben, weil $|\delta'(s)| = 1$ immer gilt.

    Eine Kugel kann durch die sogenannten Kugelkoordinaten parametrisiert werden:

    $$x = R\cos(\theta)\sin(\phi), \qquad y = R\sin(\theta)\sin(\phi), \qquad z = R\cos(\phi)$$

    und mit

    $$\begin{aligned} \mathcal{X}(\theta,\phi) &= \langle R\cos(\theta)\sin(\phi), R\sin(\theta)\sin(\phi), R\cos(\phi)\rangle, \\ \mathcal{X}_\theta(\theta,\phi) &= \langle -R\sin(\theta)\sin(\phi), R\cos(\theta)\sin(\phi), 0\rangle, \\ \mathcal{X}_\phi(\theta,\phi) &= \langle R\cos(\theta)\cos(\phi), R\sin(\theta)\cos(\phi), -R\sin(\phi)\rangle, \end{aligned}$$

    wird der Normaleneinheitsvektor durch

    $$\hat{\mathrm{n}} = \frac{\mathcal{X}_\theta \times \mathcal{X}_\phi}{|\mathcal{X}_\theta \times \mathcal{X}_\phi|} = -\frac{R\sin(\phi)\mathcal{X}}{|R\sin(\phi)\mathcal{X}|} = -\frac{\mathcal{X}}{|\mathcal{X}|} = -\frac{\mathcal{X}}{R}$$

    gegeben.

35. *Habe ich ein Beispiel einer Fläche, die ich parametrisieren kann und deren Flächeninhalt ich bestimmen kann?*

    Mit den obigen Kugelkoordinaten kann der Flächeninhalt einer Kugel wie folgt bestimmt werden:

    $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\mathcal{X}_\theta \times \mathcal{X}_\phi| d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R\sin(\phi) d\phi d\theta = 2\pi R[-\cos(\phi)]_0^{\pi} = 4R\pi.$$

36. *Kann ich die Greenschen Formeln herleiten?*

Mit $F = v\nabla u$ gelten:

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot (v\nabla u) = v\nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u, \qquad F \cdot n = v\nabla u \cdot n = v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Der Gaußsche Integralsatz ergibt:

$$\int_\Omega v\nabla^2 u dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx = \int_\Omega \nabla \cdot F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} dx.$$

Nun erhält man durch Subtraktion:

$$\begin{aligned} \int_\Omega v\nabla^2 u dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx &= \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} dx \\ \int_\Omega u\nabla^2 v dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} dx \\ \Rightarrow \quad \int_\Omega [v\nabla^2 u - u\nabla^2 v] dx &= \int_{\partial\Omega} [v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}] dx. \end{aligned}$$

37. *Habe ich ein Beispiel in dem ich den Gaußschen Integralsatz anwenden kann?*

Sei $F = \langle y, z, x\rangle$ so daß $\nabla \cdot F = \partial_x y + \partial_y z + \partial_z x = 0$ gilt. Dann ergibt der Gaußsche Integralsatz:

$$\int_{\partial\Omega} [F \cdot n] ds = \int_\Omega [\nabla \cdot F] dx = 0$$

obwohl $F \cdot n \neq 0$ auf $\partial\Omega$ gilt.

38. *Habe ich ein Beispiel in dem ich den Stokesschen Integralsatz anwenden kann?*

Sei $F = \langle x, y, z\rangle$ so daß $\nabla \times F = \langle \partial_y z - \partial_z y, -\partial_x z + \partial_z x, \partial_x y - \partial_y x\rangle = 0$ gilt. Dann ergibt der Stokessche Integralsatz:

$$\int_{\partial S} F \cdot dx = \int_S [\nabla \times F] \cdot \boldsymbol{n} dx = 0$$

obwohl $F \neq 0$ auf ∂S gilt.