Proseminar aus Analysis III im WS 02/03 – Übungsbeispiele

1. Konstruiere eine Folge $\{\phi_n\} \subset C^1$, die gegen $\chi \in C^0 \backslash C^1$ in der L^1-Norm konvergiert. Zeige an Hand dieses Beispiels, daß die mit der L^1-Norm ausgestatteten C^1-Funktionen keinen vollständigen Vektorraum bilden.

2. Konstruiere eine Folge $\{\psi_n\} \subset C^2$, die gegen $\theta \in C^1 \backslash C^2$ in der L^2-Norm konvergiert. Zeige an Hand dieses Beispiels, daß die mit der L^2-Norm ausgestatteten C^2-Funktionen keinen Hilbertraum bilden.

3. Konstruiere eine Folge $\{f_n\}$ von Treppenfunktionen, die gegen f punktweise aber nicht gleichmäßig konvergiert, wobei f keine sprungstetige Funktion ist. Finde eine Norm $\|\cdot\|_\star$ in welcher $\|f - f_n\|_\star \to 0$ gilt. Mit welcher Norm sind die sprungstetigen Funktionen ein Banachraum, in dem die Treppenfunktionen dicht sind? Zeige an Hand dieses Beispiels, daß die mit der $\|\cdot\|_\star$-Norm ausgestatteten sprungstetigen Funktionen keinen Banachraum bilden.

4. Entscheide ob
$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
sprungstetig ist.

5. Entscheide ob
$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & x \in \boldsymbol{Q} \cap [0,1] \text{ mit teilerfremder Darstellung } x = m/n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
sprungstetig oder Riemann integrierbar ist.

6. Für eine sprungstetige Funktion f und $p \in [1, \infty)$ sei
$$\|f\|_p = \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$
und $p' = p/(p-1)$ bezeichnet den zu p *dualen Exponenten* (mit $1/0 = \infty$). Beweise:

   a. Für sprungstetige Funktionen f und g gilt die *Höldersche Ungleichung*:
   $$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

   b. Für sprungstetige Funktionen f und g gilt die *Minkowskische Ungleichung*:
   $$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

   c. Für eine stetige Funktion f und $1 \le p \le q \le \infty$ gilt:
   $$\|f\|_p \le (\beta - \alpha)^{1/p - 1/q} \|f\|_q.$$

   d. Für eine stetig differenzierbare Funktion f mit $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ gilt:
   $$2\|f\|_\infty^2 \le \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2.$$

7. Es seien $h > 0$ und $f \in C^4([-h,h], \boldsymbol{R})$. Zeige:
$$\left| \int_{-h}^h f(x)dx - \frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h)) \right| \le \frac{h^5}{90} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

8. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{x} dx$$

konvergent oder absolut konvergent ist.

9. Leite das Volumen und die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel her.

10. Zeige, daß $u(x,t) = \mathrm{erf}(x/\sqrt{4t})$ mit dem sogenannten Fehlerintegral (error function)

$$\mathrm{erf}\,(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-\xi^2}\, d\xi$$

die Lösung des folgenden Problems ist:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0; \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Was ist die Beziehung zwischen $\mathrm{erf}(\infty)$ und der Γ-Funktion? Zeige auch daß

$$v(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)} e^{-(2k+1)^2 t}$$

die Lösung des folgenden Problems ist:

$$v_t = v_{xx}, \quad x \in (-\pi, +\pi), \quad v(\pm\pi, t) = 0, \quad t > 0; \qquad v(x,0) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\pi) \\ 0, & x = 0, \pm\pi \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}.$$

Was ist die Fourierreihe von $v(x,0)$?

11. Sei $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$.

   a. Skizziere die Mengen $\|\boldsymbol{x}\|_p = 1$, $1 \le p \le \infty$.

   b. Finde die Entfernung

   $$d_p(\hat{\boldsymbol{x}}, M) = \inf_{\boldsymbol{x} \in M} \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_p$$

   zwischen dem Punkt $\hat{\boldsymbol{x}} = (1,1)$ und der Menge $M = \{(x_1, x_2) : x_2 = -x_1\}$.

   c. Finde alle Punkte $\boldsymbol{x} \in M$, die $\|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_p = d_p(\hat{\boldsymbol{x}}, M)$ erfüllen.

12. Seien $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ und $A = \{a_{ij}\} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$.

   a. Finde das großte c_1 und das kleinste c_2, die

   $$c_1 \|\boldsymbol{x}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_q \le c_2 \|\boldsymbol{x}\|_p$$

   erfüllen, wobei $1 \le p \le q \le \infty$ gilt.

   b. Beweise:

   $$\sup_{\boldsymbol{x} \ne 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} = \|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{und} \quad \sup_{\boldsymbol{x} \ne 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

13. Es sei $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \ne (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Beweise:

a. $\partial_1 f(0,0) = D_{e_1} f(0,0)$ und $\partial_2 f(0,0) = D_{e_2} f(0,0)$ existieren.

b. $D_v f(0,0)$ existiert nicht für $v \in \boldsymbol{R}^2 \backslash \{e_1, e_2\}$.

c. f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

14. Mit den Normen,

$$\|f\|_{C^n(I)} = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)|$$

beweise daß die Abbildung $Lf = f'$ von $(C^1(\boldsymbol{R}), \|\cdot\|_{C^1(\boldsymbol{R})})$ nach $(C^0(\boldsymbol{R}), \|\cdot\|_{C^0(\boldsymbol{R})})$ linear und stetig ist. Berechne die Fréchetsche Ableitung und die Richtungsableitungen von L.

15. Für $\varepsilon > 0$ definiere:

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon) & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $f \in C^0(\boldsymbol{R})$ definiere:

$$g_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

a. Beweise daß g_ε gegen f punktweise konvergiert, wenn ε verschwindet.

b. Beweise daß $g_\varepsilon \in C^1(\boldsymbol{R})$ gilt, und zeige:

$$g'_\varepsilon(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

c. Definiere die Abbildung $L_\varepsilon f = g_\varepsilon$ von $(C^0(\boldsymbol{R}), \|\cdot\|_{C^0(\boldsymbol{R})})$ nach $(C^1(\boldsymbol{R}), \|\cdot\|_{C^1(\boldsymbol{R})})$. Beweise: L_ε ist an $f = 0$ stetig, L_ε ist stetig, L_ε ist beschränkt, und die folgende Abschätzung gilt:

$$\|L_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(C^0(\boldsymbol{R}), C^1(\boldsymbol{R}))} = \sup_{\|f\|_{C^0(\boldsymbol{R})} \neq 0} \frac{\|L_\varepsilon f\|_{C^1(\boldsymbol{R})}}{\|f\|_{C^0(\boldsymbol{R})}} \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

16. Definiere $f(x,y) = y^2 - x^2$

a. Skizziere in $\boldsymbol{R}^3$ die Flächendarstellung von f.

b. Skizziere in $\boldsymbol{R}^2$ die Niveaukurven, $\Gamma_c = \{(x,y) : f(x,y) = c\}, \quad c \in \boldsymbol{R}$.

c. Skizziere das Vektorfeld $\nabla f(x,y)$ in der gleichen Grafik wie (b).

d. Skizziere die Kurven des steilsten Anstiegs in der gleichen Grafik wie (b) und (c).

e. Beachte: Im allgemeinen, (b)$\perp$(c) und (b)$\perp$(d).

17. Verwende die Verfahren vom letzten Beispiel, um die kritischen Punkte (worin $\nabla f = 0$ oder ∇f nicht existiert) der folgenden Funktionen zu beschreiben.

a. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$	b. $f(x,y) = x^2 + y^3$
c. $f(x,y) = x^3 + y^3$	d. $f(x,y) = 1 - x^4 - y^4$
e. $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/3}$	f. $f(x,y) = xy$.

Beachte, daß die Eigenwerte $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ der Hesseschen Matrix $\{f_{x_i x_j}\}$, d.h. die Wurzeln von der Gleichung,

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} - \lambda I \right\} = (f_{xx} - \lambda)(f_{yy} - \lambda) - f_{xy} f_{yx} = 0,$$

benützt werden können, um die kritischen Punkte zu charakterisieren.

18. Gib alle differenzierbaren Funktionen $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ mit $f(\boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{R}$.

19. Sei $v \in L^2([-1,1])$ eine verrauschte Funktion. Sei u eine entrauschte Abschätzung von v mit $u \in L^2([-1,1])$ und $u' \in L^2([-1,1])$, die durch die Minimierung von

$$J(u) = \int_{-1}^{+1} [u(x) - v(x)]^2 dx + \mu \int_{-1}^{+1} [u'(x)]^2 dx$$

bestimmt wird. Mit einem äquidistanten Gitter $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, \ldots, n$, $h = 2/n$, sei J_h eine Annährung von J:

$$J_h(\boldsymbol{u}) = h \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2 + h\mu \sum_{i=1}^{n-1} [(u_{i+1} - u_i)/h]^2$$

wobei $\boldsymbol{u} = \{u_i\}$, $u_i \approx u((x_{i-1} + x_i)/2)$, $\boldsymbol{v} = \{v_i\}$, und $v_i \approx v((x_{i-1} + x_i)/2)$.

a. Berechne die Richtungsableitungen von J. Mit einer Formel für die Richtungsableitungen finde die Fréchetsche Ableitung von J. Bestätige die Fréchetsche Ableitung mit der Definition.

b. Berechne den Gradient von J_h, z.B. mit $n = 3$ zuerst und dann für allgemeines n.

c. Charakterisiere den kritischen Punkt für J_h mit einer Gleichung $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, worin A eine Matrix ist, die von μ und h abhängt.

20. Definiere $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ und zeige, daß f kein lokales Extremum in $(0,0)$ hat, obwohl $g_{(u,v)}(t) = f(tu, tv)$ ein lokales Minimum in $t = 0$ für jedes $(u,v) \in \boldsymbol{R}^2$ hat.

21. Zeige: für $A \in \mathcal{L}(E,F)$ gilt $A \in C^\infty(E,F)$ mit $\partial A = A$ und $\partial^2 A = 0$.

22. Modelle für die drei grundsätzlichen physikalischen Phänomene:

a. Felder. Stelle $f(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ grafisch dar, und zeige, daß f eine Lösung der Laplaceschen Gleichung $\Delta f := \sum_j \partial_j^2 f = 0$ in $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x \neq 0 \neq y\}$ ist.

b. Diffusion. Stelle $g(x,t) = \exp[-x^2/(4t)]/\sqrt{t}$ grafisch dar, und zeige, daß g eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $[\partial_t - \Delta]g = 0$ in $\{(x,t) \in \boldsymbol{R}^2 : t > 0\}$ ist.

c. Wellen. Stelle $h(x,t) = \sin(x - 2t)$ grafisch dar, und zeige, daß h eine Lösung der Wellengleichung $[\partial_t^2 - \Delta]h = 0$ in $\{(x,t) \in \boldsymbol{R}^2\}$ ist.

23. Eine Transformation $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ heist *starr* wenn $[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}] = I$ gilt, z.B. betrachte

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = R(c)\boldsymbol{x}, \qquad R(c) = \begin{bmatrix} \cos(c) & \sin(c) \\ -\sin(c) & \cos(c) \end{bmatrix}, \qquad [\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}]^T[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}] = R^{\mathrm{T}}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nimm an, daß $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, z) : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ eine von einem Parameter z abhängige Transformation ist, z.B. betrachte $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, z) = R(z)\boldsymbol{x}$. Mit einer Transformation $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ nimm an, daß $\partial_z \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, z) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, z))$ gilt, und daß $\boldsymbol{G}$ schiefsymmetrisch ist, d.h. $[\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}] = -[\partial_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}]^{\mathrm{T}}$. Berechne $\partial_z\{[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, z)]^{\mathrm{T}}[\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, z)]\}$ und zeige, daß $\boldsymbol{F}$ für jedes z starr ist, wenn $\boldsymbol{F}$ für ein z starr ist.

24. Bestimme die Taylorentwicklung von $f(x,y) = (x - y)/(x + y)$ im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung.

25. Zeige, daß

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \exp[1/(|\boldsymbol{x}|^2 - \varepsilon^2)], & |\boldsymbol{x}| < \varepsilon \\ 0, & |\boldsymbol{x}| \geq \varepsilon \end{cases}$$

glatt ist.

26. Es seien X offen in E und Y offen in F sowie $f \in \mathrm{Diff}^1_{\mathrm{loc}}(X,Y)$. Zeige: $\partial f(x_0)$ gehört zu $\mathcal{L}\mathrm{is}(E,F)$ für $x_0 \in X$, und $\partial f^{-1}(y_0) = [\partial f(x_0)]^{-1}$ mit $y_0 := f(x_0)$.

27. Für die folgenden Abbildungen bestimme $Y := f(X)$ und f^{-1}. Ferner entscheide, ob $f \in \mathrm{Diff}^q_{\mathrm{loc}}(X, \boldsymbol{R}^2)$ oder $f \in \mathrm{Diff}^q(X,Y)$.

    a. $X := \boldsymbol{R}^2$, $f(x,y) = (x+a, y+b)$, $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$
    b. $X := \boldsymbol{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - x - 2, 3y)$
    c. $X := \boldsymbol{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$
    d. $X := \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 < y < x\}$, $f(x,y) = (\log xy, 1/(x^2+y^2))$
    e. $X := \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x > 0\}$, $f(x,y) = (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)$
    f. $X := \boldsymbol{R}^2$, $f(x,y) = (x,y)/\sqrt{1+x^2+y^2}$.

28. Es seien X offen in $\boldsymbol{R}^m$ und $f \in C^1(X, \boldsymbol{R}^m)$. Zeige:

    a. Gilt $\partial f(x) \in \mathcal{L}\mathrm{is}(\boldsymbol{R}^m)$ für $x \in X$, so besitzt $x \mapsto |f(x)|$ in X kein Maximum.
    b. Gelten $\partial f(x) \in \mathcal{L}\mathrm{is}(\boldsymbol{R}^m)$ und $f(x) \neq 0$ für $x \in X$, so besitzt $x \mapsto |f(x)|$ kein Minimum.

29. Berechne:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (tW)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tW)^k}{k!} \quad \text{wobei} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

30. Zeige, daß das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned}$$

in der Nähe von $(1/2, 0, 1/2, 0)$ nach (u,v) aufgelöst werden kann. Wie lauten die ersten Ableitungen von u und v bezüglich (x,y)?

31. Es seien E, F, G und H Banachräume, und X sei offen in H. Ferner seien $A \in C^1(X, \mathcal{L}(E,F))$, $B \in C^1(X, \mathcal{L}(E,G))$, und gelte $(A(x), B(x)) \in \mathcal{L}\mathrm{is}(E, F \times G)$, $x \in X$. Schließlich seien $(f,g) \in F \times G$ und $\varphi : X \to E$, $x \mapsto (A(x), B(x))^{-1}(f,g)$. Berechne $\partial\varphi(x)$. Hinweis: Löse $H(x,v) = (A(x)v, B(x)v) = (f,g)$ nach v auf.

32. Eine Kreisscheibe rolle auf einer Geraden, ohne zu gleiten. Welche Parametrisierung ergibt sich für die Bahn eines beliebigen, fest mit der Kreisscheibe verbundenen (inneren oder äußeren) Punktes? Bestimme die Bogenlänge der entsprechenden Bahnkurve.

33. Zeige, daß eine Gerade die C^2-Kurve mit der kürzesten Länge zwischen zwei Punkten ist.

34. Für $\lambda < 0$ und $a \in \boldsymbol{R}$ ist $\gamma_{a,t} = \{e^{\lambda\tau}(\cos(\tau), \sin(\tau)) : a \leq \tau \leq t\}$ eine glatte reguläre Parametrisierung der logarithmischen Spirale $\Gamma = [\gamma_{a,t}]$. Finde irgendeine orientierungserhaltende C^∞-Umparametrisierung $\delta_{b,s} = \gamma_{a,t} \circ \varphi$ mit $a = \varphi(b)$ und $t = \varphi(s)$. Finde die bestimmte Umparametrisierung (die sogenannte Bogenlänge-Parametrisierung) wobei $s = \varphi^{-1}(t) = L([\gamma_{a,t}]) = L([\delta_{b,s}])$.

35. Berechne die totale Variation der Funktionen $h(x) = \mathrm{Signum}(x)$ und $f(x) = \exp(-x^2)$.

36. Sei $\gamma = \{e^{-t}(\cos(t), \sin(t)) : \pi \leq t \leq 2\pi\}$ eine glatte reguläre Parametrisierung einer logarithmischen Spirale Γ. Sei δ die Bogenlänge-Parametrisierung von Γ. Mit γ und dann δ berechne den Tangenteneinheitsvektor an Γ im Punkt $(0, -e^{-3\pi/2})$.

37. Für $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ berechne die Krümmung und die Torsion der elliptischen Schraubenlinie $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t), ct)$.

38. Stelle den Torus $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle [a + b\cos(v)]\cos(u), [a + b\cos(v)]\sin(u), b\sin(v)\rangle$ grafisch dar, und zeige, daß der Oberflächeninhalt $4\pi^2 ab$ ist.

39. Mit dem Gaußschen Integralsatz, bestätige die Greenschen Formeln:

$$\int_\Omega v\nabla^2 u d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} d\boldsymbol{s}$$

$$\int_\Omega [u\nabla^2 v - v\nabla^2 u] d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} [u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}] d\boldsymbol{s}.$$

40. Definiere $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2\langle x,y,z\rangle$ und zeige mit dem Gaußschen Integralsatz, daß

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} d\boldsymbol{s} = 5a^4 b\pi/4$$

gilt, wobei Γ der Rand von $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b\}$ ist und $\hat{\boldsymbol{n}}$ der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor ist.

41. Definiere $\boldsymbol{r}(t) = \langle 2\cos(t), 2\sin(t), -3\rangle$, $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{r}'(t)/|\boldsymbol{r}'(t)|$ und $\boldsymbol{v}(x,y,z) = \langle y, xz^3, -zy^3\rangle$, und zeige mit dem Stokesschen Integralsatz, daß

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{u}(t) dt = -112\pi$$

gilt.