Beispiel 33. Zeige, daß ein Liniensegment die C^2-Kurve mit der kürzesten Länge zwischen zwei Punkten ist.

Lösung. *Einfache Version.* Seien $y \in C^2([0,T],\boldsymbol{R})$ und $\Gamma = \text{graph}(y)$. Da $y \in C^1([0,T],\boldsymbol{R})$ gilt, folgt:

$$L(\Gamma) = \int_0^T \sqrt{1+[y'(t)]^2}dt.$$

Definiere den Funktional J mit den Randbedingungen:

$$J(y) = \int_0^T \sqrt{1+[y'(t)]^2}dt, \qquad y(0)=a, \quad y(T)=b.$$

Wir suchen ein y, in dem die Richtungsableitungen von J für alle zulässigen Störungen u verschwinden:

$$\frac{\delta J}{\delta y}(y;u) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(y+\varepsilon u)-J(y)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \frac{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon u'(t)]^2}-\sqrt{1+[y'(t)]^2}}{\varepsilon}dt =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \frac{(1+[y'(t)+\varepsilon u'(t)]^2)-(1+[y'(t)]^2)}{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon u'(t)]^2}+\sqrt{1+[y'(t)]^2}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \frac{2y'(t)u'(t)+\varepsilon u'(t)^2}{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon u'(t)]^2}+\sqrt{1+[y'(t)]^2}}dt$$

$$= \int_0^T \frac{y'(t)u'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}}dt = \frac{y'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}}u(t)\bigg|_0^T - \int_0^T u(t)\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}}\right)'dt.$$

Wegen der Randbedingungen $y(0)=a$, $y(T)=b$, muss die Störung u am Rand verschwinden, d.h. $u(0)=0$ und $u(T)=0$ gelten und daher gilt:

$$\frac{\delta J}{\delta y}(y;u) = -\int_0^T u(t)\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}}\right)'dt.$$

Da $y+\varepsilon u \in C^2([0,T],\boldsymbol{R}^n)$, $\forall\varepsilon$ gilt, darf $u \in C^2([0,T],\boldsymbol{R}^n)$ eine glatte Störung mit beliebig kleinem Träger sein. Nimm an, daß der Träger von u gegen 0 geht und daß der Betrag von u gegen ∞ geht. Dann wird das obige Integral in einem Punkt konzentriert. Um die Richtungsableitungen für alle zulässigen Störungen zu verschwinden, muss die folgende Gleichung gelten:

$$\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}}\right)' = 0, \qquad 0<t<T, \qquad y(0)=a, \quad y(T)=b.$$

Daher gilt mit $k_1,k_2,k_3 \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}} = k_1 \quad\Rightarrow\quad [y'(t)]^2 = \frac{k_1}{1-k_1} \quad\Rightarrow\quad y'(t)=k_2 \quad\Rightarrow\quad y(t)=k_2t+k_3.$$

Mit den Randbedingungen gilt $y(t)=a+(b-a)t/T$, d.h. $\Gamma=\text{graph}(y)$ ist ein Liniensegment.

Daß der Funktional J minimiert wird, zeigt man wie folgt:

$$\frac{\delta^2 J}{\delta y^2}(y;u,v) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\delta J}{\delta y}(y+\varepsilon v;u)-\frac{\delta J}{\delta y}(y;u)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left\{\frac{[y'(t)+\varepsilon v'(t)]u'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}}-\frac{y'(t)u'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}}\right\}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left\{\frac{y'(t)u'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}}\frac{(1+[y'(t)]^2)-(1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2)}{\sqrt{1+[y'(t)]^2}+\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}}+\right.$$

$$\left.\frac{\varepsilon u'(t)v'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}}\right\}dt = \int_0^T\left\{\frac{\varepsilon u'(t)v'(t)}{\sqrt{1+[y'(t)+\varepsilon v'(t)]^2}}-\frac{[y'(t)]^2u'(t)v'(t)}{[1+[y'(t)]^2]^{3/2}}\right\}dt = \int_0^T\frac{v'(t)u'(t)}{[1+[y'(t)]^2]^{3/2}}dt$$

so daß mit $y(t) = a + (b-a)t/T$ folgt:

$$\frac{\delta^2 J}{\delta y^2}(y;u,u) = \int_0^T \frac{[u'(t)]^2}{[1+[(b-a)/T]^2]^{3/2}} dt > 0, \qquad u \neq 0, \quad (u(0) = u(T) = 0 \Rightarrow u' \neq 0)$$

und daher ist die zweite Ableitung von J in y positiv definit. ■

Allgemeine Version. Sei $\gamma \in C^2([0,T], \boldsymbol{R}^n)$ eine Parametrisierung der Kurve Γ. Da $\gamma \in C^1([0,T], \boldsymbol{R}^n)$ gilt, folgt:

$$L(\Gamma) = \int_0^T |\gamma'(t)| dt.$$

Definiere den Funktional J mit den Randbedingungen:

$$J(\gamma) = \int_0^T |\gamma'(t)| dt, \qquad \gamma(0) = a, \quad \gamma(T) = b.$$

Wir suchen ein γ in dem die Richtungsableitungen von J für alle zulässigen Störungen α verschwinden:

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta \gamma}(\gamma;\alpha) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(\gamma+\varepsilon\alpha) - J(\gamma)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \frac{|\gamma'(t)+\varepsilon\alpha'(t)| - |\gamma'(t)|}{\varepsilon} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{|\gamma'(t)+\varepsilon\alpha'(t)|^2 - |\gamma'(t)|^2}{|\gamma'(t)+\varepsilon\alpha'(t)| + |\gamma'(t)|} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \frac{2\gamma'(t)\cdot\alpha'(t) + \varepsilon|\alpha'(t)|^2}{|\gamma'(t)+\varepsilon\alpha'(t)| + |\gamma'(t)|} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \frac{\gamma'(t)\cdot\alpha'(t)}{|\gamma'(t)|} dt = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\cdot\alpha(t)\Big|_0^T - \int_0^T \alpha(t)\cdot\left(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\right)' dt. \end{aligned}$$

Wegen der Randbedingungen $\gamma(0) = a$, $\gamma(T) = b$, muss die Störung α am Rand verschwinden, d.h. $\alpha(0) = 0$ und $\alpha(T) = 0$ gelten und daher gilt:

$$\frac{\delta J}{\delta \gamma}(\gamma;\alpha) = -\int_0^T \alpha(t)\cdot\left(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\right)' dt.$$

Da $\gamma + \varepsilon\alpha \in C^2([0,T], \boldsymbol{R}^n)$, $\forall\varepsilon$ gilt, darf $\alpha \in C^2([0,T], \boldsymbol{R}^n)$ eine glatte Störung mit beliebig kleinem Träger sein. Nimm an, daß der Träger von α gegen 0 geht und daß der Betrag von α gegen ∞ geht. Dann wird das obige Integral in einem Punkt konzentriert. Um die Richtungsableitungen für alle zulässigen Störungen zu verschwinden, muss die folgende Gleichung (punktweise) gelten:

$$\left(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\right)' = 0, \quad 0 < t < T, \qquad \gamma(0) = a, \quad \gamma(T) = b.$$

Daher gelten:

$$\left(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = k \in \boldsymbol{R}^n, \qquad |k| = \left|\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\right| = \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma'(t)|} = 1$$

und:

$$\gamma'(t) = k|\gamma'(t)| \quad \Rightarrow \quad [k\cdot\gamma'(t)] = (k\cdot k)|\gamma'(t)| \overset{|k|=1}{=} |\gamma'(t)| \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) \overset{|\gamma'(t)|=[k\cdot\gamma'(t)]}{=} k[k\cdot\gamma'(t)].$$

Das Integration der letzten Gleichung gibt:

$$[\gamma(t) - \gamma(0)] = \int_0^t \gamma'(\tau)d\tau \overset{\gamma'(t)=k[k\cdot\gamma'(t)]}{=} k\left[k\cdot\int_0^t \gamma'(\tau)d\tau\right] = k\{k\cdot[\gamma(t)-\gamma(0)]\} = ks(t)$$

und mit der skalaren Funktion,

$$s(t) = k\cdot[\gamma(t)-\gamma(0)] = k\cdot\int_0^t \gamma'(\tau)d\tau \overset{k\cdot\gamma'(t)=|\gamma'(t)|}{=} \int_0^t |\gamma'(\tau)|d\tau = L(\{\gamma_{0,t}\})$$

gilt daher $\gamma(t) = a + ks(t)$, wobei $s(t) = L(\{\gamma_{0,t}\})$ die Bogenlänge von 0 bis t ist. In anderen Worten, liegt der Bildbereich von γ in der Gerade $\{z = a + ks : s \in \boldsymbol{R}\}$. Mit den Randbedingungen gilt $k = [\gamma(T) - a]/s(T) = (b-a)/s(T)$ oder $\gamma(t) = a + (b-a)s(t)/s(T)$. Aus der letzten obigen Gleichung folgt $s'(t) = |\gamma'(t)| \geq 0$, und daher besitzt γ den Bildbereich $\{z = a + s(b-a) : s \in [0,1]\}$, d.h. Γ ist ein Liniensegment. Können Sie zeigen, daß J in γ minimiert wird? ■